INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · E. METTLER · K. v. SANDEN
F. SCHLEICHER · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXV. BAND ZWEITES HEFT 1957

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 27. Februar 1957

Postverlagsort Berlin *Preis DM 12,60*

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel,** Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz,** Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A

Professor Dr.-Ing. **K. Klotter,** Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.

Professor Dr. **E. Mettler,** Karlsruhe-Durlach, Geigersberger Str. 12

Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden,** Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, (T. H. West)

Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. **F. Schleicher,** Dortmund, Plauener Str. 44

Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt,** Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21

Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen,** Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg — Neuenheimer Landstraße 28—30 / Fernsprecher 2 79 01

Berlin W 35 — Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 24 92 51

Inhalt:

Seite

Keller, W., Neue kritische Drehzahlen von einfach besetzten Wellen. Mit 10 Abbildungen 71

Woinowsky-Krieger, S., Über die Biegung des orthotropen Plattenstreifens durch Einzellasten. Mit 6 Abbildungen 90

Frederiksen, E., Resonance-Behavior of Non-Linear One-Dimensional Gas Vibrations Analyzed by the *Ritz-Galerkin* Method. Mit 5 Abbildungen 100

Maag, H., Knickung von Schraubenfedern unter Druck und konservativer Torsion. Mit 15 Abbildungen 113

Nickel, K., Ein Sonderfall des senkrechten Profilgitters bei beliebigen instationären Bewegungen. Mit 5 Abbildungen 134

Meyer zur Capellen, W., Die Extrema der Geschwindigkeiten an Kurbeltrieben. Mit 26 Abbildungen 140

INGENIEUR-ARCHIV

XXV. BAND ZWEITES HEFT 1957

Neue kritische Drehzahlen von einfach besetzten Wellen

Von W. Keller

1. Einleitung. Wie *H. Melan* in einer Arbeit über kritische Drehzahlen von Maschinenwellen mit Längsbelastung[1] gezeigt hat, werden die Biegesteifigkeit und damit auch die kritischen Drehzahlen von Wellen durch eine Zugbelastung hinauf- und durch eine Druckbelastung herabgesetzt. Eine ähnliche Erscheinung fand *R. Grammel*[2] bei Wellen, die ein Drehmoment zu übertragen haben. Ein solches verkleinert nämlich unabhängig davon, welchen Drehsinn es besitzt, stets die Biegesteifigkeit der Welle und daher auch ihre kritischen Drehzahlen. Beiden Untersuchungen liegt eine zeitliche konstante Belastung zu Grunde.

Indessen kommt es im Maschinenbau auch häufig vor, daß auf eine Welle neben konstanten noch pulsierende Torsionsmomente und pulsierende Axialkräfte wirken, wodurch sich ihre Biegesteifigkeit mit der Zeit periodisch ändert. Da diese in den Bewegungsgleichungen einer auf der Welle sitzenden Scheibe als Koeffizient auftritt, wird in diesem Fall das Verhalten der Scheibe durch Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten bestimmt. Solche Gleichungen besitzen unter gewissen Umständen instabile Lösungen, die also mechanisch gesehen ein unbegrenztes Ausweichen der Scheibe beschreiben. Hängt die Frequenz der pulsierenden Belastung von der Drehzahl ab, so sind kritische Drehzahlen zu erwarten, die sich von den seither bekannten zumindest durch eine völlig andere Ursache unterscheiden.

Wie die durch diese Überlegungen angedeuteten Zusammenhänge im einzelnen sind, wird in der vorliegenden Arbeit untersucht. Dabei zeigt sich, daß es bei einem konstanten oder auch harmonisch schwankenden Antriebsmoment neben der kritischen Drehzahl erster Art unendlich viele Dubletts von kritischen Drehzahlen zweiter Art gibt, wenn die Axialkraft oder das Torsionsmoment harmonisch schwankt. Außerdem gibt es noch kritische Drehzahlbereiche, deren Breite mit dem pulsierenden Anteil der Axialkraft oder des Torsionsmomentes zunimmt, und deren Anzahl von der Größe der stabilisierend wirkenden Dämpfungskräfte abhängt.

2. Die Bewegungsgleichungen. Gegeben sei eine irgendwie gelagerte Welle von überall kreisförmigem, sonst jedoch beliebig veränderlichem Querschnitt, die um ihre im unverformten Zustand gerade Achse rotieren möge. Sie trage eine einzige Scheibe, deren Masse man sich in ihrem Schwerpunkt (Massenmittelpunkt) konzentriert denkt. Von dem sekundären Einfluß einer etwaigen Kreiselwirkung wird also abgesehen. Außerdem soll vorausgesetzt werden, daß die Wellenmasse gegenüber der Scheibenmasse vernachlässigt werden kann.

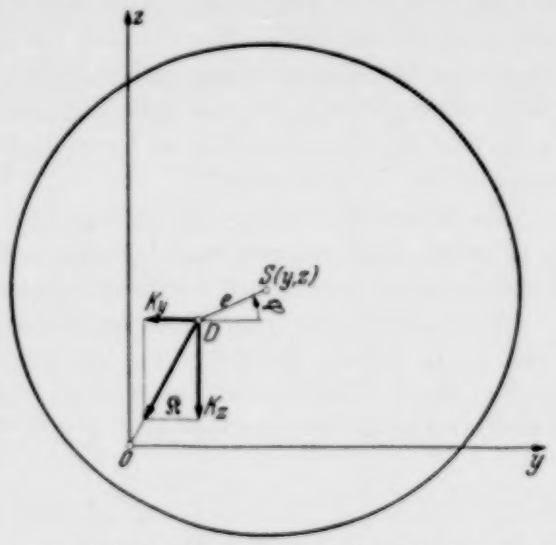


Abb. 1. Bezeichnungen an der rotierenden Scheibe.

In einem raumfesten Bezugssystem, dessen Ursprung O auf der Verbindungsgeraden g der Lagermitten liegt, und dessen (y, z)-Ebene auf der Geraden g senkrecht steht und außerdem noch den Schwerpunkt S enthält, habe dieser die Koordinaten y und z (Abb. 1). Die Lage des Durchstoßpunktes D der gebogenen Wellenachse mit dieser Scheibenmittelebene (y, z), der wegen der stets vorhandenen Zentrierungsfehler der Scheiben einen Abstand e vom Schwerpunkt S besitzt, ist dann mittels des Winkels φ, den die Gerade DS mit der positiven y-Achse bildet, durch die Koordinaten $y - e\cos\varphi$, $z - e\sin\varphi$, bestimmt.

Die wegen der Elastizität der Welle auf die Scheibe wirkende Kraft $\mathfrak{K} = (O, K_y, K_z)$ kann in den Koordinaten des Schwerpunkts ausgedrückt werden. Mit der Einflußzahl α, d. h. der Aus-

[1] *H. Melan*, Z. öst. Ing.- u. Arch.-Ver. 69 (1917) S. 610.
[2] *R. Grammel*, Stodola-Festschrift S. 180, Zürich, Leipzig 1929.

lenkung des Punktes D infolge einer in D senkrecht auf g stehenden Einheitskraft von gleicher Richtung wie die Auslenkung[1], werden die Komponenten der Kraft $\mathfrak{K}$ in $-y$- und $-z$-Richtung

$$K_y = \frac{1}{\alpha}(y - e\cos\varphi)\,, \tag{1}$$

$$K_z = \frac{1}{\alpha}(z - e\sin\varphi)\,, \tag{2}$$

und somit lauten mit der Scheibenmasse m die Bewegungsgleichungen des Schwerpunkts[2]

$$\left.\begin{aligned} m\,\ddot{y} + \frac{1}{\alpha}\,y &= \frac{e}{\alpha}\cos\varphi\,,\\ m\,\ddot{z} + \frac{1}{\alpha}\,z &= \frac{e}{\alpha}\sin\varphi\,. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Dabei sollen alle Einflüsse auf die Wellenbiegung durch die Einflußzahl α berücksichtigt werden.

Da bei Wellen, die gedrückt und tordiert werden, die Einflußzahlen stark davon abhängen, wie das Torsionsmoment in die Welle eingeleitet wird, soll zunächst festgelegt werden, welcher Art die an der Welle angreifenden Kräfte und Momente sein sollen. Von der Zug- bzw. Druckkraft $\mathfrak{P}$ wird angenommen, daß sie axial ist, d. h. daß ihre Wirkungslinie stets mit der Verbindungsgeraden (g) der Lagermitten zusammenfällt. In einem (x, y, z)-System, dessen x-Achse in der ursprünglich geraden Wellenachse liegt, besitzt also die Kraft $\mathfrak{P}$ vom Betrag P die Komponenten

$$\mathfrak{P} = (P, 0, 0). \tag{4}$$

Sie sei positiv, wenn sie auf die Welle drückt und negativ, wenn sie an ihr zieht. Das Torsionsmoment $\mathfrak{W}$ vom Betrag W wird dagegen als semitangential vorausgesetzt, d. h. der Momentvektor $\mathfrak{W}$ halbiere immer den Winkel zwischen der unverbogenen Wellenachse und der Tangente an die verbogene Wellenachse. Mit den Auslenkungen $v(x)$ und $w(x)$ der verbogenen Wellenachse in y- bzw. z-Richtung ergibt sich somit die Komponentendarstellung des Torsionsmomentes in erster Näherung zu

$$\mathfrak{W} = \left(W,\ \frac{1}{2}\,v_1'\,W,\ \frac{1}{2}\,w_1'\,W\right), \tag{5}$$

wobei Striche Ableitungen nach x bedeuten und der Index 1 die Stelle x_1 kennzeichnet, an der das Moment $\mathfrak{W}$ angreift. Ein solches Torsionsmoment wird z. B. von mehr als zwei gleich großen und über den Scheibenumfang gleichmäßig verteilten Tangentialkräften erzeugt[3], wie sie etwa bei mehrfach oder gleichmäßig beaufschlagten Turbinenscheiben auftreten. Belastungen von der Art (4) und (5) führen bekanntlich zu Verschiebungsvektoren α, die dieselbe Richtung haben wie die Einheitskräfte, die sie erzeugen.[4]

In älteren Untersuchungen wurden oft axiale Momentvektoren $\mathfrak{W} = (W, 0, 0)$ benützt, die jedoch nur selten vorkommen und im allgemeinen keine konservative Belastung darstellen[5]. Wenn daher im folgenden von einem Torsionsmoment die Rede ist, so soll es stets semitangential sein.

Betrachtet man nun eine stationäre Drehung der Scheibe mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} = \omega =$ konst., so führen bei festem α die Gleichungen (3) in bekannter Weise zu dem kritischen Zustand erster Art[6]. Nimmt man an, daß sich infolge eines periodisch schwankenden Antriebsmomentes der Drehwinkel der Scheibe gemäß

$$\varphi = \omega\,t + \vartheta(t) \tag{6}$$

ändert, wobei ω die konstante mittlere Drehgeschwindigkeit und $\vartheta(t)$ eine periodische Funktion der Zeit ist, so treten neben den kritischen Drehzahlen erster Art auch solche zweiter Art auf[7]. Beide sind Resonanzerscheinungen mit ihren bekannten Merkmalen.

Bei einer pulsierenden Beanspruchung der Welle auf Druck und Torsion wird jedoch auch die in den Bewegungsgleichungen auftretende Einflußzahl $\alpha\,(P, W)$ eine periodische Funktion der Zeit t

[1] Es sind auch bei rotationssymmetrischen Wellen Belastungen möglich, bei denen die Verschiebung α nicht dieselbe Richtung hat wie die Einheitskraft [siehe *Ziegler*, Ing.-Arch. 20 (1952) S. 384], jedoch werden solche Fälle im weiteren nicht behandelt.

[2] Siehe *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, Technische Dynamik, Bd. 2, S. 156, 2. Aufl., Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953.

[3] Siehe *H. Ziegler*, Ing.-Arch. 20 (1952) S. 377.

[4] Ebd. S. 385.

[5] *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Phys. 3 (1952) S. 96.

[6] *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, a. a. O. S. 155.

[7] *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, a. a. O. S. 180.

sein. In diesem Fall hat man mit (3) zwei voneinander unabhängige *Hill*sche Differentialgleichungen. Um sie explizit anschreiben zu können, muß zunächst α als Funktion der periodisch schwankenden Belastungen P und W bestimmt werden. Damit diese Funktion $\alpha\,(P, W)$ eine übersichtliche Form annimmt, ist es zweckmäßig, sie in eine *Taylor*sche Reihe zu entwickeln, was dadurch gerechtfertigt ist, daß die Amplituden der Belastungen P und W praktisch wohl immer weit unter den entsprechenden Knickwerten einer statischen Axialkraft und eines statischen Torsionsmomentes liegen. Dazu empfiehlt es sich, die dimensionslosen Abkürzungen

$$\varrho^2 = \frac{P\,l^2}{E\,J}, \qquad \mu^2 = \left(\frac{W\,l}{E\,J}\right)^2 \tag{7}$$

einzuführen, wobei l die Länge der Welle, E der Elastizitätsmodul und J das axiale Flächenträgheitsmoment des Wellenquerschnitts ist. Beachtet man, daß für die Wellenbiegung und damit auch für die Einflußzahl $\alpha(\varrho, \mu)$ zwar das Vorzeichen von P, nicht aber das von W wesentlich ist, so stellt man leicht fest, daß $\alpha(\varrho, \mu)$ eine gerade Funktion von ϱ und μ sein muß und demnach in erster Näherung die Form[1]

$$\alpha(\varrho, \mu) = \alpha(0, 0) + \varrho^2 \left.\frac{\partial \alpha(\varrho, 0)}{\partial \varrho^2}\right|_{\varrho = 0} + \mu^2 \left.\frac{\partial \alpha(0, \mu)}{\partial \mu^2}\right|_{\mu = 0} + \cdots \tag{8}$$

besitzt. Mit den stets positiven Größen

$$\alpha(0, 0) = \alpha_0\,, \quad \frac{1}{\alpha_0} \left.\frac{\partial \alpha(\varrho, 0)}{\partial \varrho^2}\right|_{\varrho = 0} = \varkappa_1\,, \quad \frac{1}{\alpha_0} \left.\frac{\partial \alpha(0, \mu)}{\partial \mu^2}\right|_{\mu = 0} = \varkappa_2 \tag{9}$$

kann man daher in derselben Näherung auch

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_0}\,(1 - \varkappa_1\,\varrho^2 - \varkappa_2\,\mu^2 - \cdots) \tag{10}$$

setzen.

Nun sollen sich die Axialkraft P und das Torsionsmoment W je aus einem konstanten und einem mit der Kreisfrequenz Ω pulsierenden Anteil zusammensetzen und zwar so, daß

$$P = P_0 + P_1 \cos \Omega\, t, \qquad W = W_0 + W_1 \cos \Omega\, t \tag{11}$$

ist. Dabei können die Größen P_1, W_0 und W_1 als positiv vorausgesetzt werden, ohne daß dadurch die Allgemeinheit des Ansatzes (11) eingeschränkt wird. Dann bildet man analog zu (7) die Abkürzungen

$$\varrho_0^2 = \frac{P_0\,l^2}{E\,J}, \quad \varrho_1^2 = \frac{P_1\,l^2}{E\,J}, \quad \mu_0^2 = \left(\frac{W_0\,l}{E\,J}\right)^2, \quad \mu_1^2 = \left(\frac{W_1\,l}{E\,J}\right)^2. \tag{12}$$

Mit ihnen und den Abkürzungen (7) findet man aus (11) leicht

$$\varrho^2 = \varrho_0^2 + \varrho_1^2 \cos \Omega\, t\,,$$

$$\mu^2 = \mu_0^2 + \frac{1}{2}\,\mu_1^2 + 2\,\mu_0\,\mu_1 \cos \Omega\, t + \frac{1}{2}\,\mu_1^2 \cos 2\,\Omega\, t\,,$$

womit die Entwicklung (10) in

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_0}\left[1 - \varkappa_1\,\varrho_0^2 - \varkappa_2\,\mu_0^2 - \frac{1}{2}\,\varkappa_2\,\mu_1^2 - (\varkappa_1\,\varrho_1^2 + 2\,\varkappa_2\,\mu_0\,\mu_1) \cos \Omega\, t - \frac{1}{2}\,\varkappa_2\,\mu_1^2 \cos 2\,\Omega\, t - \cdots\right] \tag{13}$$

übergeht. Daraus ist ersichtlich, daß nun die Differentialgleichungen (3) periodische Koeffizienten besitzen.

Mit den dimensionslosen Veränderlichen

$$\tau = \Omega t, \qquad \eta = \frac{y}{l}, \qquad \zeta = \frac{z}{l}\,. \tag{14}$$

und den dimensionslosen Festwerten

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}\left(1 - \varkappa_1\,\varrho_0^2 - \varkappa_2\,\mu_0^2 - \frac{1}{2}\,\varkappa_2\,\mu_1^2\right), \\ \gamma_1 &= -\frac{\omega_0^2}{\Omega^2}\,(\varkappa_1\,\varrho_1^2 + 2\,\varkappa_2\,\mu_0\,\mu_1)\,, \\ \gamma_2 &= -\frac{\omega_0^2}{\Omega^2} \cdot \frac{1}{2}\,\varkappa_2\,\mu_1^2\,, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

[1] *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, a. a. O. S. 179.

worin

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\varkappa_0 m}} \tag{16}$$

die kritische Drehgeschwindigkeit der unbelasteten, querschwingenden Welle ist, lassen sich die Bewegungsgleichungen (3) in der Form

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} + (\lambda + \gamma_1 \cos\tau + \gamma_2 \cos 2\tau)\ \eta &= \frac{e}{l}(\lambda + \gamma_2 \cos\tau + \gamma_2 \cos 2\tau) \cos\varphi\,, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau^2} + (\lambda + \gamma_1 \cos\tau + \gamma_2 \cos 2\tau)\ \zeta &= \frac{e}{l}(\lambda + \gamma_1 \cos\tau + \gamma_2 \cos 2\tau) \sin\varphi \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

schreiben.

Da bei praktischen Problemen meist $W_1 \ll W_0$ und demnach $\mu_0^2 \gg \mu_1^2$ ist, kann man in (15) die Glieder mit μ_1^2 vernachlässigen. In den Differentialgleichungen (17) verschwinden dann insbesondere die Glieder mit $\cos 2\tau$, so daß das Verhalten der Scheibe durch zwei unhomogene *Mathieu*sche Differentialgleichungen beschrieben wird. Um diesen eine für die weitere Untersuchung günstigere Gestalt zu geben, führt man mit

$$\omega_k^2 = \omega_0^2 (1 - \varkappa_1 \varrho_0^2 - \varkappa_2 \mu_0^2) \tag{18}$$

das Quadrat der kritischen Drehgeschwindigkeit der mit P_0 und W_0 vorbelasteten Welle[1] ein und kommt damit zu den Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Omega^2}{\omega_k^2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} + \left[1 - (\varkappa_1 \varrho_1^2 + 2\,\varkappa_2 \mu_0 \mu_1)\frac{\omega_0^2}{\omega_k^2}\cos\tau\right]\eta &= \frac{e}{l}\left[1 - (\varkappa_1 \varrho_1^2 + 2\,\varkappa_2 \mu_0 \mu_1)\frac{\omega_0^2}{\omega_k^2}\cos\tau\right]\cos\varphi\,, \\ \frac{\Omega^2}{\omega_k^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau^2} + \left[1 - (\varkappa_1 \varrho_1^2 + 2\,\varkappa_2 \mu_0 \mu_1)\frac{\omega_0^2}{\omega_k^2}\cos\tau\right]\zeta &= \frac{e}{l}\left[1 - (\varkappa_1 \varrho_1^2 + 2\,\varkappa_2 \mu_0 \mu_1)\frac{\omega_0^2}{\omega_k^2}\cos\tau\right]\sin\varphi\,. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Dabei wird die Frequenz Ω der äußeren Belastung sehr häufig mit der Drehgeschwindigkeit ω der Scheibe gekoppelt sein, etwa so, daß auf jeden Umlauf der Welle ν Impulse fallen, also

$$\Omega = \nu\,\omega \tag{20}$$

ist. Setzt man in (19) zur Abkürzung

$$\frac{\Omega^2}{\omega_k^2} = q^2\,, \quad (\varkappa_1 \varrho_1^2 + 2\,\varkappa_2 \mu_0 \mu_1)\frac{\omega_0^2}{\omega_k^2} = \varepsilon\,, \quad \frac{e}{l} = \psi\,, \tag{21}$$

so erhält man bei Berücksichtigung von (6) und (20) die endgültige Fassung der Bewegungsgleichungen:

$$q^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} + (1 - \varepsilon\cos\tau)\,\eta = \psi\,(1 - \varepsilon\cos\tau)\cos\left[\frac{\tau}{\nu} + \vartheta(\tau)\right], \tag{22a}$$

$$q^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau^2} + (1 - \varepsilon\cos\tau)\,\zeta = \psi\,(1 - \varepsilon\cos\tau)\sin\left[\frac{\tau}{\nu} + \vartheta(\tau)\right]. \tag{22b}$$

Dabei sind die Parameter q^2, ε und ψ stets positiv.

Für die Berechnung der bis jetzt noch nicht näher angegebenen Funktion $\vartheta(\tau)$ wird nun ein Antriebsmoment zugrunde gelegt, das mit derselben Frequenz $\Omega = \nu\,\omega$ pulsiert wie die äußere Belastung P und W. Dann gilt in erster Näherung[2]

$$\vartheta(\tau) = -\frac{a_\nu}{\nu^2 \omega^2 \Theta}\cos(\tau + \beta_\nu)\,, \tag{23}$$

worin Θ das Trägheitsmoment der Scheibe bezüglich einer auf ihrer Mittelebene senkrecht stehenden Schwerpunktachse, a_ν die Amplitude des Antriebsmomentes und β_ν ein konstanter Phasenwinkel ist.

Die Gleichungen (22) lassen sich, ohne bestimmte Wellenmaße festzulegen, weiterbehandeln, da in ihnen keine benannten Größen mehr auftreten. Zunächst soll jedoch im nächsten Abschnitt an einem Beispiel gezeigt werden, wie man die Koeffizienten $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ und damit auch ω_k^2 und ε berechnen kann, wobei wir uns auf eine Welle von überall gleichem Querschnitt beschränken.

3. Die Berechnung der Einflußzahlen. Um die Einflußzahl a einer Welle explizit zu berechnen, geht man von ihren Biegegleichungen aus. Diese lauten[3] im Rahmen einer Theorie erster Ordnung — man darf sich auf kleine Auslenkungen $v(x)$ und $w(x)$ beschränken — für eine mit $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{W}$ be-

[1] *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, a. a. O. S. 179.
[2] *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, a. a. O. S. 181.
[3] Siehe *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Phys. 2 (1951) S. 281.

lastete Welle von überall gleicher Biegesteifigkeit EJ

$$\left.\begin{aligned} EJ\,v^{IV} + W\,w''' + P\,v'' &= 0\,,\\ EJ\,w^{IV} - W\,v''' + P\,w'' &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Es empfiehlt sich, diese beiden Gleichungen mit der komplexen Veränderlichen

$$r(x) = v(x) + i\,w(x) \tag{25}$$

in die eine Differentialgleichung

$$EJ\,r^{IV} - i\,W\,r''' + P\,r'' = 0 \tag{26}$$

zusammenfassen. Deren allgemeinste Lösung kann man zwar leicht angeben, die Bestimmung der darin auftretenden Integrationskonstanten führt jedoch schon bei einfachen Randbedingungen zu umständlichen Rechnungen, nach denen die Ausdrücke für $\alpha(P, W)$ meist sehr undurchsichtig werden. Es ist daher zweckmäßig, die Gleichung (26) mit einem Näherungsverfahren zu lösen.

Betrachtet man beispielsweise eine vor der Biegung kreiszylindrische, beiderseits frei drehbar gelagerte Welle (Abb. 2), die an der Stelle $x = a$ (der Ursprung des benützten Koordinatensystems soll dabei im linken Lager der Welle liegen) mit einer in y-Richtung wirkenden Kraft Q belastet ist und nur in ihrem linken Teil ($0 \leqq x \leqq a$) ein semitangentiales Moment $\mathfrak{W}$, jedoch keine Axialkraft $\mathfrak{P}$ überträgt, so erkennt man sofort, daß in diesem Fall die elastische Linie des verdrillten Wellenteils eine Raumkurve ist, deren Differentialgleichung zufolge (26) die Form

$$EJ\,r^{IV} - i\,W\,r''' = 0 \qquad (0 \leqq x \leqq a) \tag{27}$$

besitzt. Für den restlichen Teil der Biegelinie gilt dagegen

$$EJ\,r^{IV} = 0 \qquad (a \leqq x \leqq l)\,. \tag{28}$$

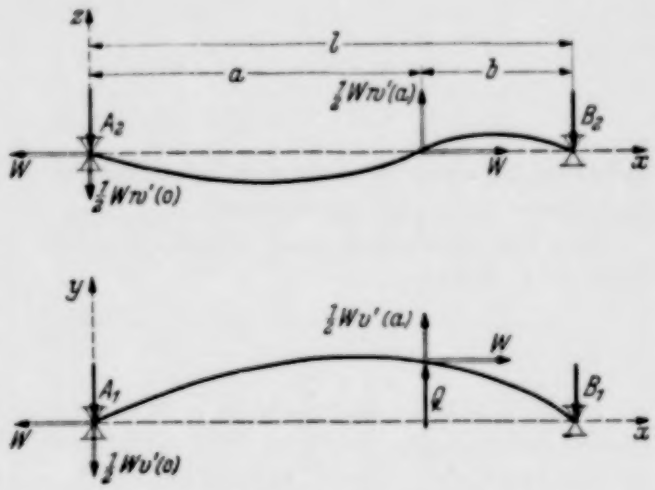


Abb. 2. Auf- und Grundriß der durch Q und W zu einer Raumkurve verbogenen Wellenachse.

Nach einer ersten Integration erhält man

$$EJ\,r''' - i\,W\,r'' = -(A_1 + i\,A_2) \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq a\,, \tag{29}$$

$$EJ\,r''' = B_1 + i\,B_2 \quad \text{für} \quad a \leqq x \leqq l\,. \tag{30}$$

Die reellen Integrationskonstanten A_1, A_2 und B_1, B_2 stellen dabei die Reaktionskräfte des linken bzw. des rechten Lagers dar. Man kann sie in den Größen W und Q ausdrücken, indem man die aus Abb. 2 leicht abzulesenden[1] Momentengleichgewichtsbedingungen der Welle (mit $b = l - a$)

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{b\,Q}{l} + \frac{W\,w'(0)}{2\,l} - \frac{W\,w'(a)}{2\,l}\,, & A_2 &= \frac{W\,v'(a)}{2\,l} - \frac{W\,v'(0)}{2\,l}\,,\\ B_1 &= \frac{a\,Q}{l} + \frac{W\,w'(a)}{2\,l} - \frac{W\,w'(0)}{2\,l}\,, & B_2 &= \frac{W\,v'(0)}{2\,l} - \frac{W\,v'(a)}{2\,l} \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

anschreibt. Für die weitere Rechnung ist es vorteilhaft, die dimensionslosen Größen

$$\xi = \frac{x}{l}\,, \quad \xi_1 = \frac{a}{l}\,, \quad \xi_2 = \frac{b}{l} \tag{32}$$

und die Einflußzahl

$$\alpha_0 = \frac{1}{3}\,\frac{l^3}{EJ}\,\xi_1^2\,\xi_2^2 \tag{33}$$

der nur mit Q belasteten Welle neben der bereits verwendeten Abkürzung $\mu = W\,l/EJ$ einzuführen und die Gleichungen (29) und (30) mit Rücksicht auf (31) in

$$r''' - i\,\mu\,r'' = -\frac{3}{\xi_1^2\,\xi_2}\,\alpha_0\,Q - \frac{i}{2}\,\mu\,[r'(\xi_1) - r'(0)] \quad \text{für} \quad 0 \leqq \xi \leqq \xi_1 \tag{34}$$

[1] Die in der Abb. 2 eingetragenen Pfeile weisen jeweils in der Richtung, die für die betreffende Kraft- bzw. Momentkomponente als positiv gewählt wurde [siehe Gleichung (5)].

und

$$r''' = \frac{3}{\xi_1 \xi_2^2}\alpha_0 Q - \frac{i}{2}\mu\,[r'(\xi_1) - r'(0)] \quad \text{für} \quad \xi_1 \leqq \xi \leqq 1 \tag{35}$$

umzuformen, wobei jetzt die Ableitungen nach ξ mit Strichen bezeichnet werden.

Die Randbedingungen verlangen, daß für $\xi = 0$ die Auslenkungen $v = w = 0$ und die Komponenten des Biegemomentes

$$\frac{EJ}{l^2} v'' = -\frac{W}{l} w' + \frac{1}{2}\frac{W}{l} w', \quad \frac{EJ}{l^2} w'' = \frac{W}{l} v' - \frac{1}{2}\frac{W}{l} v'$$

(siehe Abb. 2) sind, ferner daß für $\xi = 1$ sowohl $v = w = 0$ als auch $v'' = w'' = 0$ ist. Außerdem muß an der Stelle $\xi = \xi_1$ die Biegelinie und ihre erste Ableitung stetig sein. Diese Bedingungen, die man einfacher in der Form

$$\left.\begin{aligned} r(0) &= 0\,, & r(1) &= 0\,, \\ r''(0) - \frac{i}{2}\mu\, r'(0) &= 0\,, & r''(1) &= 0\,, \\ r(\xi_1 + 0) &= r(\xi_1 - 0)\,, & r'(\xi_1 + 0) &= r'(\xi_1 - 0) \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

schreibt, reichen aus, um die bei der Lösung der Gleichungen (34) und (35) auftretenden Integrationskonstanten zu bestimmen.

Die Voraussetzung $\mu \ll 1$ legt nahe, die Lösung $r(\xi)$ in eine Potenzreihe nach μ zu entwickeln. Man setzt daher

$$r(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n r_n(\xi) \tag{37}$$

und führt, um das unbekannte Funktionensystem $r_n(\xi)$ zu ermitteln, die Summe (37) in die Differentialgleichungen (34) und (35) sowie in die Randbedingungen (36) ein. Dann verlangt man, daß die Summen der Glieder mit gleichen Potenzen von μ verschwinden und findet so für $0 \leqq \xi \leqq \xi_1$ die Differentialgleichungen

$$r_0''' + \frac{3}{\xi_1 \xi_2}\alpha_0 Q = 0\,, \tag{38,0}$$

$$r_m''' - i\, r_{m-1}'' + \frac{i}{2}\,[r'_{m-1}(\xi_1) - r'_{m-1}(0)] = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{38,n}$$

sowie die Randbedingungen

$$r_0(0) = 0\,, \qquad r_0''(0) = 0\,, \tag{39,0}$$

$$r_m(0) = 0\,, \qquad r_m''(0) - \frac{i}{2} r'_{m-1}(0) = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots)\,. \tag{39,m}$$

Entsprechend gewinnt man für $\xi_1 \leqq \xi \leqq 1$ die Differentialgleichungen

$$r_0''' - \frac{3}{\xi_1 \xi_2^2}\alpha_0 Q = 0\,, \tag{40,0}$$

$$r_m''' + \frac{i}{2}\,[r'_{m-1}(\xi_1) - r'_{m-1}(0)] = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{40,m}$$

und die Rand- bzw. Anschlußbedingungen

$$\left.\begin{aligned} r_m(1) &= 0\,, & r_m''(1) &= 0\,, \\ r_m(\xi_1 + 0) &= r_m(\xi_1 - 0)\,, & r'_m(\xi_1 + 0) &= r'_m(\xi_1 - 0) \end{aligned}\right\} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{41,m}$$

Die Differentialgleichungen (38) und (40) lassen sich sukzessiv lösen; dabei sind die auftretenden Integrationskonstanten durch die Randbedingungen (39) und (41) festzulegen. Man gelangt so zu dem Funktionensystem $r_n(\xi)$, womit sich dann nach der Vorschrift (37) die Durchbiegung $r(\xi)$ der Welle ermitteln läßt. Falls $x = a$ der Ort der Scheibe ist, genügt es, für die Berechnung der Einflußzahl α die Durchbiegung an der Stelle $\xi = \xi_1$ zu kennen, was dann der Fall ist, wenn die Werte $r_n(\xi_1)$ bekannt sind.

Anhand der Differentialgleichungen (38,0), (40,0) und der dazugehörenden Randbedingungen (39,0), (41,0) stellt man fest, daß $r_0(\xi)$ die Auslenkung einer mit Q belasteten Welle ist, weshalb

$$r_0(\xi_1) = \alpha_0 Q \tag{42}$$

sein muß. Die Größe $r_1(\xi_1)$ verschwindet ebenso wie die Werte $r_3(\xi_1)$, $r_5(\xi)_1$, ..., da die Durchbiegung nicht vom Vorzeichen des Torsionsmomentes W abhängen darf. Um $r_2(\xi_1)$ zu bestimmen,

wird das durch (38) und (39) bzw. (40) und (41) vorgeschriebene Rekursionsverfahren angewandt. Man findet dabei nach einigen einfachen Zwischenrechnungen

$$r_0'' = -3\frac{\alpha_0 Q}{\xi_1^3 \xi_2}\xi \qquad \text{für} \qquad 0 \leqq \xi \leqq \xi_1 , \tag{43}$$

$$r_0'(0) = \frac{\alpha_0 Q}{2\,\xi_1^3 \xi_2}(\xi_1^2 + 2\,\xi_1 \xi_2) , \tag{44}$$

$$r_0'(\xi_1) = \frac{\alpha_0 Q}{\xi_1^3 \xi_2}(\xi_1 \xi_2 - \xi_1^2) \tag{45}$$

und danach

$$r_1'' = -\frac{i}{4}\frac{\alpha_0 Q}{\xi_1^3 \xi_2}(6\,\xi^2 - 3\,\xi_1^2 \xi - 2\,\xi_1 \xi_2 - \xi_1^2) \quad \text{für} \quad 0 \leqq \xi \leqq \xi_1 , \tag{46}$$

$$r_1'(0) = -\frac{i}{8}\frac{\alpha_0 Q}{\xi_1^3 \xi_2}(\xi_1^4 + 2\,\xi_1^2 \xi_2) , \tag{47}$$

$$r_1'(\xi_1) = -\frac{i}{4}\frac{\alpha_0 Q}{\xi_1^3 \xi_2}(\xi_1^3 - \xi_1^4 - \xi_1^2 \xi_2) , \tag{48}$$

womit die Differentialgleichungen (38,2) und (40,2) in

$$r_2''' = \frac{1}{16}\frac{\alpha_0 Q}{\xi_1^3 \xi_2}(24\,\xi^2 - 12\,\xi_1^2 \xi + 3\,\xi_1^4 - 6\,\xi_1^3 + 8\,\xi_1^2 - 8\,\xi_1) \quad \text{für} \quad 0 \leqq \xi \leqq \xi_1 \tag{49}$$

und

$$\left.\begin{aligned} r_2''' &= \frac{1}{16}\frac{\alpha_0 Q}{\xi_1^3 \xi_2}(3\,\xi_1^4 - 6\,\xi_1^3 + 4\,\xi_1^2) \\ \text{für} \qquad & \xi_1 \leqq \xi \leqq 1 \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

übergehen. Integriert man sie unter Berücksichtigung der Bedingungen (39,2) und (41,2), so erhält man schließlich mit der in Abb. 3 dargestellten Funktion

$$\Phi(\xi_1) = \frac{\xi_1}{240}(20 - 45\,\xi_1 + 46\,\xi_1^2 - 15\,\xi_1^3) \tag{51}$$

den Wert

$$r_2(\xi_1) = \Phi(\xi_1)\,\alpha_0 Q . \tag{52}$$

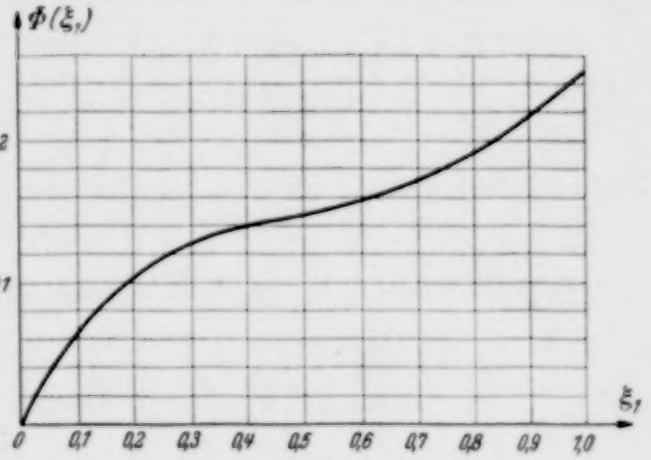


Abb. 3. Die Funktion $\Phi(\xi_1)$.

Nach (37) ergibt sich somit die Wellendurchbiegung an der Stelle $\xi = \xi_1$ zu

$$r(\xi_1) = \alpha_0 Q\,[1 + \Phi(\xi_1)\,\mu^2 + \cdots] . \tag{53}$$

Setzt man darin $Q = 1$, so erhält man die gesuchte Einflußzahl

$$\alpha = \alpha_0\,[1 + \Phi(\xi_1)\,\mu^2 + \cdots] \tag{54}$$

und durch einen Vergleich dieser Formel mit (8) und (9) die Größe

$$\varkappa_2 = \Phi(\xi_1) \tag{55}$$

als Funktion von ξ_1.

Bei allen anderen Lagerungsarten von Wellen mit fehlender Axialkraft $\mathfrak{P}$ läßt sich der Zahlenfaktor $\varkappa_2$ grundsätzlich nach derselben Methode berechnen. Analog gewinnt man die Werte $\varkappa_1$, wenn man die Differentialgleichung (26) mit $W = 0$ für die einzelnen Fälle integriert. Aber auch für Wellen, die sowohl mit $\mathfrak{P}$ als auch mit $\mathfrak{W}$ belastet sind, können die Faktoren $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ mit Hilfe der am vorhergehenden Beispiel angewandten Störungsrechnung ermittelt werden, indem man mit dem Doppelreihenansatz

$$r(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \sum_{m=0}^{\infty} \varrho^m\, r_{n\,m}(\xi)$$

in die Differentialgleichung (26) und die entsprechenden Randbedingungen eingeht und die Glieder mit den gleichen Potenzen von μ und ϱ gleich Null setzt. Man erhält so Differentialgleichungen und Randbedingungen, aus denen sich die Funktionen $r_{n\,m}(\xi)$ und damit auch die Durchbiegung $r(\xi_1)$ am Ort der Scheibe leicht berechnen lassen.

Um eine etwas grobe Abschätzung der Faktoren $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ vornehmen zu können, betrachtet man die Formel (10), aus der ersichtlich ist, daß die Klammer $(1 - \varkappa_1 \varrho^2 - \varkappa_2 \mu^2 - \cdots) = 0$ wird,

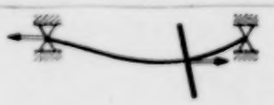
wenn $\alpha \to \infty$ geht. Das bedeutet, daß die Gleichung

$$1 - \varkappa_1 \varrho^2 - \varkappa_2 \mu^2 = 0 \tag{56}$$

in erster Näherung die Knickbedingung für eine mit einer Kraft P und einem Moment W belastete Welle ist. Allerdings wird die Bedingung (56) nur brauchbar sein, wenn die Entwicklung (10) rasch konvergiert; dann aber können, sofern nur die Knickwerte von P und W bekannt sind, die Faktoren $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ aus der Gleichung (56) berechnet werden.

In Tabelle 1 sind für einige Lagerungsarten schon bekannte[1] Zahlenwerte von $\varkappa_1$ für $\mathfrak{W} = 0$ und $\varkappa_2$ für $\mathfrak{P} = 0$ zusammengestellt. Darin sind die aus den Knicklasten gewonnenen Werte durch einen Stern gekennzeichnet. Ihre Abweichung von den exakt berechneten Faktoren kann als Maß für die Konvergenz der Entwicklung (10) angesehen werden. Ferner sind in Tabelle 1 neben den Faktoren $\varkappa_2$ für semitangentiale Torsionsmomente auch die entsprechenden Faktoren für axiale Torsionsmomente $\mathfrak{W} = (W, 0, 0)$ aufgeführt.

Tabelle 1. *Die Faktoren $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ für verschiedene Belastungsarten*

Lagerung / Belastung	P (axial)		W (semitang.)		W (axial)	
	$\varkappa_1$	$\varkappa_1^*$	$\varkappa_2$	$\varkappa_2^*$	$\varkappa_2$	$\varkappa_2^*$
	0,1000	0,1013	0,0375	0,0414	0,0219	0,0253
	0,4000	0,4053	0,0875	0,1013	0	∞
	0,0250	0,0253	0,0094	0,0124	0,0094	0,0124
	0,0063		0,0034		0	
			$\Phi(\xi_1)$ (Abb. 3)			

4. Eine partikuläre Lösung der Bewegungsdifferentialgleichungen. Den folgenden Betrachtungen liegen die nicht gekoppelten, linearen Differentialgleichungen (22) zugrunde. Ihre allgemeinen Lösungen setzen sich jeweils aus der allgemeinen Lösung der entsprechenden verkürzten Differentialgleichung [die aus (22) durch Nullsetzen der rechten Seiten hervorgeht] und irgendeiner Partikularlösung der nicht verkürzten Differentialgleichung additiv zusammen. Da in der vorliegenden Untersuchung nur kritische Zustände interessieren, genügt es zu wissen, für welche Parameterwerte ε, q die Lösungen mit der Zeit unbeschränkt anwachsen, wozu die Kenntnis ihrer expliziten Form nicht unbedingt notwendig ist.

Zunächst hat man also die Aufgabe, zwei Integrale $\bar{\eta}(\tau)$, $\bar{\zeta}(\tau)$ der nicht verkürzten Differentialgleichungen zu finden.

Unter der bereits getroffenen Voraussetzung, daß die Axialkraft P und das Torsionsmoment W im Vergleich zu ihren Knickwerten klein sind, wird stets $\varepsilon < 1$ sein. Daher liegt es nahe, die beiden Gleichungen (22) mit Hilfe der Störungsrechnung zu lösen, indem man die Lösungen $\bar{\eta}(\tau)$ und $\bar{\zeta}(\tau)$ nach Potenzen von ε entwickelt. Man setzt also, wenn man sich vorerst nur auf die erste der beiden Gleichungen (22) beschränkt,

$$\bar{\eta}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \eta_n(\tau) , \tag{57}$$

[1] Siehe *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, a. a. O. S. 180; *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Phys. 3 (1952) S. 112; *H. Ziegler*, Ing.-Arch. 20 (1952) S. 390.

geht damit in die Gleichung (22a) für $\eta(\tau)$ ein und verlangt, daß die Koeffizienten gleicher Potenzen von ε verschwinden. Auf diese Weise erhält man die Gleichungen

$$q^2 \frac{d^2\eta_0}{d\tau^2} + \eta_0 = \psi \cos\left[\frac{\tau}{\nu} + \vartheta(\tau)\right], \tag{58}$$

$$q^2 \frac{d^2\eta_1}{d\tau^2} + \eta_1 = \eta_0 \cos\tau - \psi \cos\tau \cos\left[\frac{\tau}{\nu} + \vartheta(\tau)\right], \tag{59}$$

$$q^2 \frac{d^2\eta_n}{d\tau^2} + \eta_n = \eta_{n-1} \cos\tau \qquad (n = 2, 3, 4 \ldots), \tag{60}$$

aus denen sich die η_n sukzessiv berechnen lassen. Setzt man die Funktion $\vartheta(\tau)$ (23) in die Gleichung (58) ein, so geht diese nach einer kurzen Zwischenrechnung, in der man $\sin\vartheta = \vartheta$ und $\cos\vartheta = 1$ setzt, weil voraussetzungsgemäß das schwankende Antriebsmoment und damit auch ϑ selbst als klein anzusehen ist, in

$$q^2 \frac{d^2\eta_0}{d\tau^2} + \eta_0 = \psi \cos\frac{\tau}{\nu} + \frac{\psi\, a_\nu}{2\,\nu^2\,\omega^2\,\Theta}\left\{\sin\left[\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\tau + \beta_\nu\right] - \sin\left[\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\tau + \beta_\nu\right]\right\} \tag{61}$$

über. Man erkennt nun sofort, daß η_0 für $\nu^2 = q^2$ und $\nu^2 = q^2(\nu \pm 1)^2$ mit der Zeit unbeschränkt anwächst. Drückt man in diesen beiden Resonanzbedingungen die Größe q mittels der Abkürzungen (20) und (21) in ω und ω_k aus, so erhält man in

$$\omega = \omega_k \tag{62}$$

und

$$\omega = \frac{\omega_k}{|\,\nu \pm 1\,|} \tag{63}$$

die allgemein bekannten kritischen Drehzahlen erster und zweiter Art. Sie werden durch ein mit der Zeit lineares Anwachsen der Größe η_0, die ja in der allgemeinen Lösung η als Summand auftritt, hervorgerufen.

Die allgemeine Lösung der Gleichung (61) findet man für $\nu^2 \neq q^2$ und $\nu^2 \neq q^2(\nu \pm 1)^2$ leicht zu

$$\left.\begin{aligned}\eta_0 = C_1 \cos\frac{\tau}{q} + C_2 \sin\frac{\tau}{q} + \frac{\psi\,\nu^2}{\nu^2 - q^2}\cos\frac{\tau}{\nu} + \frac{\psi\, a_\nu}{2\,\omega^2\,\Theta}\cdot\frac{1}{\nu^2 - q^2(\nu+1)^2}\sin\left[\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\tau + \beta_\nu\right] \\ - \frac{\psi\, a_\nu}{2\,\omega^2\,\Theta}\cdot\frac{1}{\nu^2 - q^2(\nu-1)^2}\sin\left[\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\tau + \beta_\nu\right].\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Dabei können die beiden Integrationskonstanten C_1 und C_2 willkürlich festgelegt werden, da η eine beliebige Lösung der Gleichung (22a) sein darf. Man setzt daher in (64) $C_1 = C_2 = 0$, so daß die Gleichung (59) für η_1 in

$$\left.\begin{aligned}q^2 \frac{d^2\eta_1}{d\tau^2} + \eta_1 = \left\{\frac{\psi\,\nu^2}{\nu^2 - q^2}\cos\frac{\tau}{\nu} + \frac{\psi\, a_\nu}{2\,\omega^2\,\Theta}\cdot\frac{1}{\nu^2 - q^2(\nu+1)^2}\sin\left[\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\tau + \beta_\nu\right]\right. \\ - \frac{\psi\, a_\nu}{2\,\omega^2\,\Theta}\,\frac{1}{\nu^2 - q^2(\nu-1)^2}\sin\left[\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\tau + \beta_\nu\right] - \psi\cos\frac{\tau}{\nu} \\ \left. - \frac{\psi\, a_\nu}{2\,\nu^2\,\omega^2\,\Theta}\cdot\left(\sin\left[\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\tau + \beta_\nu\right] - \sin\left[\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\tau + \beta_\nu\right]\right)\right\}\cos\tau\end{aligned}\right\} \tag{65}$$

übergeht. Formt man die rechte Seite dieser Gleichung noch etwas um, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}q^2 \frac{d^2\eta_1}{d\tau^2} + \eta_1 = \frac{\psi}{2}\,\frac{q^2\nu^2}{\nu^2 - q^2}\left[\cos\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\tau + \cos\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\tau\right] \\ + \frac{\psi\, a_\nu}{4\,\omega^2\Theta}\,\frac{q^2(\nu+1)^2}{\nu^2[\nu^2 - q^2(\nu+1)^2]}\left\{\sin\left(\frac{\tau}{\nu} + \beta_\nu\right) + \sin\left[\left(2+\frac{1}{\nu}\right)\tau + \beta_\nu\right]\right\} \\ + \frac{\psi\, a_\nu}{4\,\omega^2\Theta}\,\frac{q^2(\nu-1)^2}{\nu^2[\nu^2 - q^2(\nu-1)^2]}\left\{\sin\left(\frac{\tau}{\nu} - \beta_\nu\right) - \sin\left[\left(2-\frac{1}{\nu}\right)\tau + \beta\right]\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Hier zeigt sich nun eine neue Resonanz, falls $\nu^2 = q^2(2\,\nu \pm 1)^2$, oder in den Drehgeschwindigkeiten ausgedrückt,

$$\omega = \frac{\omega_k}{|\,2\,\nu \pm 1\,|} \tag{67}$$

ist.

Analog zur Berechnung von η_0 kann auch die Berechnung der Lösungen η_n $(n = 1, 2, \ldots)$ erfolgen. Es sind dabei stets Differentialgleichungen vom Typ (61) zu lösen, wobei sich aber sehr umfangreiche Ausdrücke ergeben. Man überblickt jedoch, ohne die Lösungen η_n explizit anzuschreiben, bei welchen Drehgeschwindigkeiten irgendeine von ihnen mit der Zeit unbegrenzt anwächst. Es treten nämlich, wie man aus dem Aufbau der Gleichung (66) ersieht, in der Lösung η_1 für $\nu^2 \neq q^2$, $\nu^2 \neq q^2(\nu \pm 1)^2$ und $\nu^2 \neq q^2(\nu \pm 2)^2$ Glieder mit $\sin[(2 \pm 1/\nu)\tau + \beta_\nu]$ auf, weshalb nach (60) in der Differentialgleichung für η_2 auf der rechten Seite Terme mit dem Faktor $\sin[(2 \pm 1/\nu)\tau + \beta_\nu]$ $\cos\tau$ vorkommen, von denen sich Glieder mit $\sin[(3 \pm 1/\nu)\tau + \beta]$ abspalten lassen. Demnach müssen auch wieder in der Lösung η_2 mit $\sin[(3 \pm 1/\nu)\tau + \beta_\nu]$ harmonisch pulsierende Anteile vorhanden sein. Setzt man diese Überlegung fort, so erkennt man, daß auf den rechten Seiten der Differentialgleichungen für die η_{n-1} $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ immer Glieder mit $\sin[(n \pm 1/\nu)\tau + \beta_\nu]$ stehen, die, wie ein Blick auf (60) zeigt, dann Resonanz bewirken, wenn $\nu^2 = q^2(n\nu \pm 1)^2$ ist. Das besagt, daß die Drehgeschwindigkeiten

$$\omega = \frac{\omega_k}{|n\nu \pm 1|}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{68}$$

kritisch sind. Formal entsprechen diese den seither wohlbekannten kritischen Drehzahlen zweiter Art, die sich bei einem durch eine *Fourier*-Reihe mit der Grundfrequenz $\nu\omega$ darstellbaren Antriebsmoment und nicht schwankenden P und W ergeben. Bei den hier abgeleiteten kritischen Drehzahlen (68) wurde jedoch ein mit der Frequenz $\nu\omega$ rein harmonisch pulsierendes Antriebsmoment und ein mit derselben Frequenz $\nu\omega$ schwankendes P und W zugrunde gelegt. Der Unterschied zwischen beiden Arten von kritischen Drehzahlen wird noch deutlicher, wenn man bedenkt, daß es bei nicht pulsierenden P und W zu jeder Frequenz $\nu\omega$ eines harmonisch schwankenden Antriebsmomentes nur ein Dublett von kritischen Drehzahlen zweiter Art gibt, bei ebenfalls mit der Frequenz $\nu\omega$ schwankenden P und W jedoch unendlich viele.

Ist das Antriebsmoment konstant, also $\vartheta(\tau) \equiv 0$, so erhält man mit $a_\nu = 0$ aus (61)

$$q^2 \frac{d^2\eta_0}{d\tau^2} + \eta_0 = \psi \cos\frac{\tau}{\nu} \tag{69}$$

und aus (66)

$$q^2 \frac{d^2\eta_1}{d\tau^2} + \eta_1 = \frac{\psi}{2} \frac{q^2\nu^2}{\nu^2 - q^2}\left[\cos\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)\tau + \cos\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)\tau\right]. \tag{70}$$

Die Lösung η_1 besteht daher aus Gliedern mit den Faktoren $\cos(1 \pm 1/\nu)\tau$, und man sieht aus dem Aufbau der Gleichungen (60), daß jetzt auf den rechten Seiten der Differentialgleichungen für die η_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ immer Glieder mit $\cos(n \pm 1/\nu)\tau$ auftreten, die ebenfalls für $\nu^2 = q^2(n\nu \pm 1)^2$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ Resonanz erzeugen. Daher sind die Drehgeschwindigkeiten (62) und (68) auch dann kritisch, wenn das Antriebsmoment konstant ist und nur eine periodische Längskraft oder ein periodisches Torsionsmoment auf die Welle wirkt. Trotzdem sollen im folgenden auch die Drehzahlen (68) als kritische Drehzahlen zweiter Art bezeichnet werden.

Genau wie die Gleichung (22a) läßt sich auch die Gleichung (22b) behandeln. Man findet auch da, daß sich bei den Drehgeschwindigkeiten (62) und (68) Resonanz zeigt.

Wenn das Antriebsmoment der Scheibe zwar periodisch, jedoch nicht, wie in der vorhergehenden Untersuchung, harmonisch wäre, stünde auf der rechten Seite von (23) eine *Fourier*-Reihe mit der Grundfrequenz $\nu\omega$, und es würden dann in allen Summanden $\varepsilon^n\eta_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ der Summe (57), also auch bereits in η_0, Glieder auftreten, die bei den Drehgeschwindigkeiten

$$\omega = \frac{\omega_k}{|m\nu \pm 1|}, \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{71}$$

mit der Zeit unbegrenzt anwachsen würden. Dabei wäre $m\nu$ die Anzahl der Schwankungen der höheren *Fourier*-Glieder je Umlauf.

Vom praktischen Gesichtspunkt aus ist noch die Gefährlichkeit eines kritischen Zustandes wichtig; sie läßt sich mit Hilfe der Ausweichgeschwindigkeit der Scheibe abschätzen. Um das für die Drehgeschwindigkeiten (68) zu tun, hat man die Gleichungen (58), (59) und (60) für η_n und die entsprechenden Gleichungen für ζ_n bei den Drehgeschwindigkeiten (68) zu integrieren und findet dann, daß der Fahrstrahl $r_s = l\sqrt{\eta^2 + \zeta^2}$ des Scheibenschwerpunktes im wesentlichen mit einer Geschwindigkeit anwächst, die für

$$\omega = \omega_k \qquad \text{durch} \qquad \dot{r}_s = \frac{1}{2} e\,\omega_k, \tag{72}$$

für

$$\omega = \frac{\omega_k}{|\nu \pm 1|} \neq \omega_k$$

durch

$$\dot{r}_s = \frac{1}{2} e\, \omega_k \cdot \frac{a_\nu}{2\, \nu^2\, \omega^2\, \Theta} = \frac{e\, a_\nu\, (\nu \pm 1)^2}{4\, \omega_k\, \nu^2\, \Theta} \tag{73}$$

und für

$$\omega = \frac{\omega_k}{|(n+1)\,\nu \pm 1|} \neq \frac{\omega_k}{|m\,\nu \pm 1|} \quad (m < n \quad \text{und} \quad n, m = 1, 2, 3, \ldots)$$

durch

$$\dot{r}_s = \frac{e\, a_\nu\, (\nu \pm 1)^2}{4\, \omega_k\, \nu^2\, \Theta} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n \prod_{m=1}^{n} \frac{\omega_k^2}{\omega_k^2 - \omega^2\, (m\,\nu \pm 1)^2}$$

oder auch

$$\dot{r}_s = \frac{e\, a_\nu\, (\nu \pm 1)}{4\, \omega_k^2\, \nu^2\, \Theta} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n \frac{\left[(n+1) \pm \frac{1}{\nu}\right]^n}{n!} \prod_{m=1}^{n} \frac{(n+1)\,\nu \pm 1}{(n+m+1)\,\nu \pm 2} \tag{74}$$

festgelegt ist. Wie man leicht abschätzt, bleiben die Ausweichgeschwindigkeiten (74) auch für beliebig große n klein, und bei einem Vergleich der Geschwindigkeiten (72), (73) und (74) sieht man sofort, daß die kritischen Drehgeschwindigkeiten erster Art weitaus gefährlicher sind als die zweiter Art. Diese sind wohl kaum merkbar, da sie durch eine stets vorhandene Dämpfung unterdrückt werden dürften.

5. Die allgemeine Lösung der verkürzten Bewegungsgleichungen. Nachdem die kritischen Zustände erster und zweiter Art durch die partikulären Integrale der Gleichungen (22) beschrieben wurden, bleiben nun noch die zu (22) gehörenden verkürzten Differentialgleichungen vom *Mathieu*schen Typ

$$q^2 \frac{d^2\eta^*}{d\tau^2} + (1 - \varepsilon \cos\tau)\, \eta^* = 0\,, \tag{75a}$$

$$q^2 \frac{d^2\zeta^*}{d\tau^2} + (1 - \varepsilon \cos\tau)\, \zeta^* = 0 \tag{75b}$$

zu untersuchen. Da beide Gleichungen identisch sind, genügt es, sich auf eine der beiden, etwa die erste, zu beschränken. Die Lösungstheorie der *Mathieu*schen Differentialgleichungen ist vollständig entwickelt[1]; es brauchen daher im folgenden nur einige bekannte Ergebnisse wiederholt zu werden.

Die allgemeine Lösung der Gleichung (75a) läßt sich in der Form

$$\eta^* = C_1\, e^{\sigma\tau} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m\, e^{i\,m\,\tau} + C_2\, e^{-\sigma\tau} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m\, e^{-i\,m\,\tau} \tag{76}$$

darstellen, wobei C_1 und C_2 beliebige Integrationskonstanten sind. Anhand von (76) kann man nun aussagen, unter welchen Umständen die Lösung $\eta^*(\tau)$ stabil ist, d. h. für unbegrenzt wachsendes τ beschränkt bleibt, und unter welchen Umständen sie instabil ist, d. h. für unbegrenzt wachsendes τ gegen $\pm\infty$ geht. Dafür maßgebend ist der sogenannte charakteristische Exponent σ, der reell, imaginär oder komplex sein kann und eine Funktion der beiden reellen Parameter ε und q ist. Es ist zweckmäßig, die folgenden drei Fälle zu unterscheiden:

a) Ist σ eine von Null verschiedene, reelle Zahl a, also $\sigma = a \neq 0$, oder ein komplexer Wert von der Form $a + i\,m/2$ ($m = 1, 2, \ldots$), so ist die Lösung instabil.

b) Ist $\sigma = i\,b$ rein imaginär und b von Null und $m/2$ ($m = 1, 2, \ldots$) verschieden, so ist die Lösung stabil. Sie ist außerdem periodisch, wenn b rational, jedoch nicht periodisch, wenn b irrational ist.

c) Ist σ rein imaginär und besitzt die in b) ausgeschlossenen Werte $\sigma = 0$ oder $\sigma = i\,m/2$, so bilden die in (64) auftretenden partikulären Integrale kein Fundamentalsystem mehr. In diesem Grenzfall läßt sich noch eine weitere Lösung gewinnen, mit der sich die allgemeine Lösung in der Form

$$\eta^*(\tau) = C_1\, \chi_1(\tau) + C_2\, [\tau\, \chi_1(\tau) + \chi_2(\tau)] \tag{77}$$

[1] Siehe z. B. *N. W. McLachlan*, Theory and Application of *Mathieu* Functions, Oxford 1951; *E. Mettler*, Mitt. Forschungsanst. Gutehoffnungshütte 8 (1940) S. 1.

schreiben läßt. Die Funktionen $\chi_1(\tau)$ und $\chi_2(\tau)$ sind zwar periodisch mit der Periode 2π oder 4π, je nachdem, ob m gerade oder ungerade ist, jedoch ruft der Faktor τ ein mit der Zeit unbegrenztes Anwachsen von η^* hervor, weshalb die Lösung (77) als instabil bezeichnet werden muß.[1]

Weitere Werte von σ brauchen nicht betrachtet zu werden, da, wie aus der noch folgenden Entwicklung (78) ersichtlich ist, der charakteristische Exponent σ bei reellen Parametern ε und q nur die unter a) bis b) aufgeführten Werte annehmen kann.

Die in a) und b) gemachten Aussagen lassen sich nach entsprechenden Umformungen der Lösung (76) leicht bestätigen. Zu der Lösung (77) sei bemerkt, daß sie als Grenzfall — er wird später noch etwas näher dargelegt — für die vorliegende Untersuchung kaum eine Bedeutung hat.

Nachdem über das Stabilitätsverhalten der Lösungen ein Überblick gegeben wurde, ist nun festzustellen, für welche Werte der Parameterpaare ε, q der Exponent σ die unter a) vorausgesetzten Werte annimmt.

Bei genügend kleinem ε gilt[2] für σ

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{Cof}\, 2\pi\sigma = \cos\frac{2\pi}{q} + \varepsilon^2 \frac{\pi \sin\frac{2\pi}{q}}{2q(4-q^2)} \\ + \varepsilon^4 \frac{q(60-35q^2+2q^4)\pi\sin\frac{2\pi}{q} - 4(4-q^2)(1-q^2)\pi^2\cos\frac{2\pi}{q}}{32q^2(4-q^2)^3(1-q^2)} + \cdots\end{aligned}\right\} \tag{78}$$

(Die Voraussetzung $\varepsilon \ll 1$ war schon zum Auffinden einer partikulären Lösung der unverkürzten Differentialgleichung nötig und stellt daher keine weitere Einschränkung des Problems dar.) Für

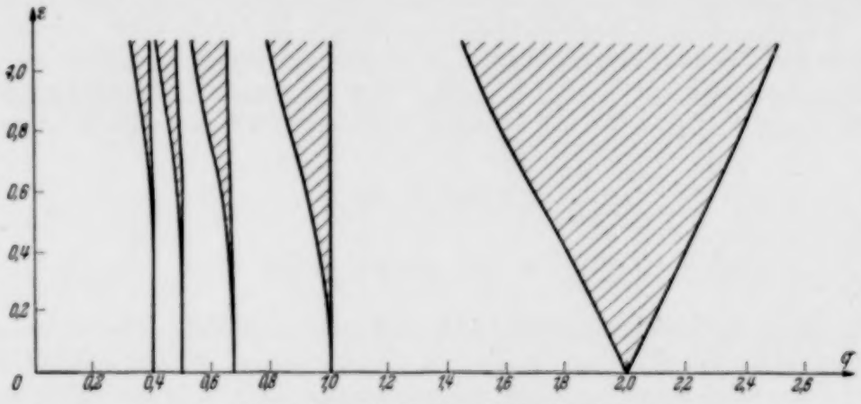


Abb. 4. Die ersten fünf Instabilitätsbereiche.

die Werte $q = 2/m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ liefert die Entwicklung (78) zunächst unbestimmte Ausdrücke, die jedoch mit der *de l'Hospital*'schen Regel leicht bestimmt werden können. So ergibt sich für $q = 2$

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{Cof}\, 2\pi\sigma = -1 - \varepsilon^2\frac{\pi^2}{32} + \varepsilon^4\frac{\pi^2(135-12\pi^2)}{73\,728} + \cdots \\ \text{und für } q = 1 \\ \mathfrak{Cof}\, 2\pi\sigma = 1 + \varepsilon^4\frac{5\pi^2}{288} + \cdots\end{aligned}\right\} \tag{79}$$

Hieraus ist ersichtlich, daß in der Nähe der Stellen

$$q = \frac{2}{m} \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{80}$$

der Betrag von $\mathfrak{Cof}\, 2\pi\sigma$ größer als eins ist; denn die rechte Seite der Gleichung (78) wird hauptsächlich durch das Glied $\cos 2\pi/q$ bestimmt, während die weiteren Glieder nur noch kleine Korrekturen liefern, die allerdings gerade bewirken, daß $\mathfrak{Cof}\, 2\pi\sigma$ das Intervall $(-1, +1)$ in der Umgebung der Punkte (80) verläßt. Wenn aber $|\mathfrak{Cof}\, 2\pi\sigma| > 1$ ist, kann σ nur entweder eine von Null verschiedene reelle Zahl oder eine komplexe Zahl von der Form $\sigma = a + i\,m/2$ $(a \neq 0, m = 1, 2, \ldots)$ sein, so daß in diesem Fall nach a) die Lösung instabil ist. Dagegen ist die Lösung stabil, wenn

[1] In der Theorie der Differentialgleichungen wird die Lösung (77) meist als stabil bezeichnet, weil jede noch so kleine, geschwindigkeitsproportionale Dämpfung dafür sorgt, daß bei unbegrenzt wachsendem τ die Lösung η^* beschränkt bleibt.

[2] *E. Mettler*, a. a. O. S. 5.

$1 > \mathfrak{Cof}\, 2\pi\sigma > -1$ ist; denn dann kann σ nur die in b) vorausgesetzten Werte annehmen. Ist schließlich $|\mathfrak{Cof}\, 2\pi\sigma| = 1$, so liegt der in c) besprochene Grenzfall vor; die zu diesem gehörenden Wertepaare ε, q bilden in einer (ε, q)-Ebene sogenannte Grenzkurven, die gemäß Abb. 4 die Ebene in stabile und instabile Bereiche aufteilen, wobei die zuletzt genannten in den Punkten $\varepsilon = 0$, $q = 2/m$ ($m = 1, 2, \ldots$) entspringen. Von den unendlich vielen Instabilitätsbereichen, die sich in $q = 0$ häufen, sind in Abb. 4 fünf schraffiert gezeichnet. Dabei wurden beim Aufzeichnen der Kurven zahlreiche Punkte aus den *Inces*chen Tabellen[1] entnommen und weitere durch entsprechende Reihenentwicklungen ermittelt.

Für die Geschwindigkeit, mit der die Lösung (76) innerhalb der Instabilitätsbereiche anwächst, ist der Realteil a des charakteristischen Exponenten σ maßgebend. Seine Größe kann man für einen gegebenen Punkt (ε, q) mit Hilfe der Gleichung (78) bestimmen, indem man $\sigma = a + i\,m/2$ ($m = 1, 2, \ldots$) setzt, wodurch die linke Seite der Gleichung in $(-1)^m \mathfrak{Cof}\, 2\pi a$ übergeht. Faßt man ε als Parameter auf, so läßt sich in einem Diagramm der Wert a als Funktion von q darstellen. Ein solches, von *E. Mettler* entworfenes[2], Diagramm ist in Abb. 5 wiedergegeben. In ihm ist statt a die Größe $2\pi a q$ als Ordinate gewählt, was sich später als vorteihaft erweisen wird. Abb. 5 zeigt, daß sich die halbovalen Kurven jeweils um die Punkte $q = 2/m$ der Abszissenachse gruppieren und mit

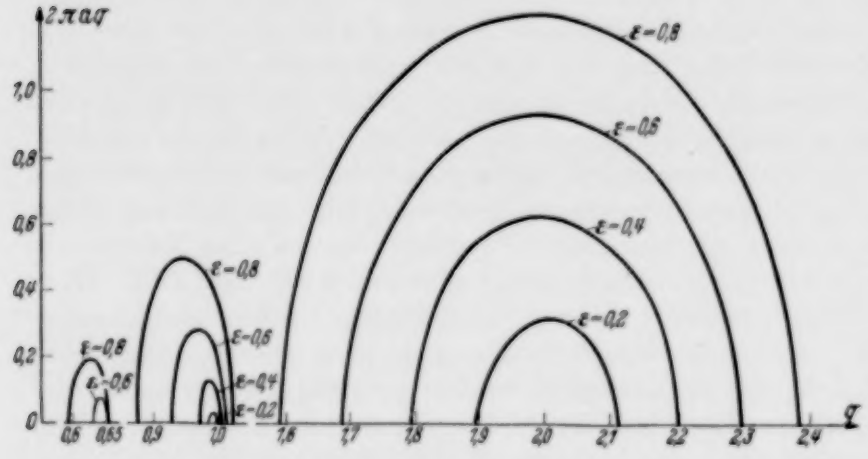


Abb. 5. Die Größe $2\pi a q$, abhängig von den Parametern ε und q.

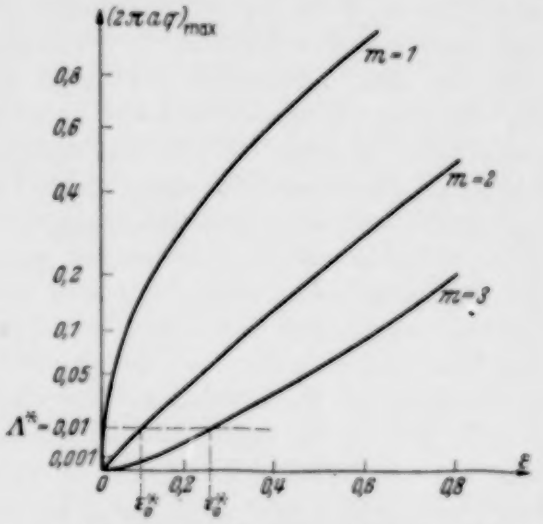


Abb. 6. Die Größe $(2\pi a q)_{max}$ für die ersten drei Instabilitätsbereiche, abhängig von ε.

abnehmendem ε schließlich auf sie zusammenschrumpfen. Für die Schnittpunkte der Kurven mit der q-Achse trifft der Fall c) von Seite 81 zu; sie entsprechen also den auf den Grenzkurven der Abb. 4 liegenden Punkten. Bemerkenswert ist noch, daß die Halbovale bei gleichbleibendem ε um so kleiner werden, je näher sie an der $2\pi a q$-Achse liegen. Das kommt auch zum Ausdruck, wenn man von den einzelnen Kurven nur die Maxima betrachtet. Zeichnet man sie in Abhängigkeit von ε auf, so entsteht Abb. 6. Dabei ist, um das Einmünden der Kurven in den Ursprung deutlich herauszustellen, für die Ordinate eine quadratische, für die Abszisse jedoch eine lineare Teilung gewählt. Auf diese Weise ist gut zu erkennen, daß die zum ersten Instabilitätsbereich gehörende Kurve schon für sehr kleine ε beträchtliche Werte für $(2\pi a q)_{max}$ aufweist. Die Kurven des zweiten, dritten und der nicht gezeichneten höheren Instabilitätsberiche verlaufen alle rechts von der des ersten Bereichs und schmiegen sich immer mehr der ε-Achse an. Damit ist die Frage nach der Größe von a genügend beantwortet.

Nachdem so einige für die vorliegende Untersuchung wichtige Eigenschaften der Lösungen von (22) erläutert sind, soll noch einiges über die mathematische Behandlung der allgemeinen Differentialgleichungen (17) bemerkt werden.

Die allgemeinen Lösungen von (17) können auf dieselbe Weise gefunden werden wie die der Gleichungen (22), wenn nur die Parameter $\gamma_1, \gamma_2 \ll \lambda$ sind, was in praktischen Fällen wohl immer zutreffen wird. Man hätte dann, um ein partikuläres Integral zu finden, die Störungsrechnung mit zwei Parametern durchzuführen, d. h. die Lösung wäre zuerst nach dem einen Parameter zu entwickeln und die dabei auftretenden Glieder nach dem anderen. An dem Ergebnis würden dann wieder die kritischen Zustände erster und zweiter Art zu erkennen sein. Die zu (17) gehörenden

[1] *N. W. McLachlan*, a. a. O., Appendix II.
[2] *E. Mettler*, a. a. O. S. 6.

verkürzten Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\eta^*}{d\tau^2} + (\lambda + \gamma_1 \cos\tau + \gamma_2 \cos 2\tau)\,\eta^* = 0, \\ \frac{d^2\zeta^*}{d\tau^2} + (\lambda + \gamma_1 \cos\tau + \gamma_2 \cos 2\tau)\,\zeta^* = 0 \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

sind wie die Gleichungen (75) vom *Hill*schen Typ. Im Gegensatz zu diesen ist die allgemeine Lösung der Gleichungen (81) nicht in allen Einzelheiten bekannt. Es wurden jedoch schon Stabilitätskarten berechnet[1], die gestatten, in einem $(\lambda, \gamma_1, \gamma_2)$-Raum die instabilen Bereiche abzugrenzen.

6. Der kritische Zustand dritter Art. Wie die Resonanzerscheinungen bei bestimmten Drehzahlen der Welle die kritischen Zustände erster und zweiter Art hervorrufen, so bewirkt auch die Instabilität einen kritischen Zustand. Dieser wird zum Unterschied von den beiden erstgenannten als kritischer Zustand dritter Art bezeichnet. Seine Ursache ist darin zu suchen, daß die pulsierenden Belastungen $P(t)$ und $W(t)$ bei bestimmten, von der Drehgeschwindigkeit ω abhängigen Frequenzen Ω nach einer von außen kommenden Störung — der Anlaß zu einer solchen wird praktisch immer gegeben sein — Biegeschwingungen aufschaukeln, deren Amplituden theoretisch unbegrenzt anwachsen. Diese Erscheinung kann jedoch auch bei Wellen auftreten, die sich nicht drehen. Sieht man nämlich von der Drehbewegung ab, so ändern sich zwar die rechten Seiten der Gleichungen (22), die dazugehörenden verkürzten Differentialgleichungen sind jedoch nach wie vor mit (75) identisch und führen, falls nur eine pulsierende Belastung $P(t)$ und $W(t)$ vorhanden ist, zu Instabilitätserscheinungen. Im Gegensatz dazu treten die kritischen Zustände erster und zweiter Art nur bei sich drehenden Wellen und dem Vorhandensein einer Unwucht auf. Aber nicht nur in der Ursache unterscheiden sich die kritischen Zustände wesentlich, sondern auch in ihrer Gefährlichkeit. Obwohl beide auf dem Anwachsen gewisser Biegeschwingungen beruhen, erfolgt dieses Anwachsen bei den kritischen Zuständen erster und zweiter Art proportional zur Zeit, wie bei allen Resonanzerscheinungen, bei den kritischen Zuständen dritter Art jedoch exponentiell mit der Zeit. Das eine Mal sind also die Ausweichgeschwindigkeiten der Scheibe zeitunabhängige Größen und können somit direkt als Maß für die Gefährlichkeit eines kritischen Zustandes angesehen werden, das andere Mal ist jedoch die Ausweichgeschwindigkeit eine Exponentialfunktion der Zeit; hier ist daher als Maß für die Gefährlichkeit der Realteil a des charakteristischen Exponenten anzusehen, der sich bei bekanntem ε und q aus der Abb. 5 entnehmen oder auch mittels der Gleichung (78) berechnen läßt. Es scheint demnach die Gefährlichkeit eines kritischen Zustandes dritter Art erheblich größer zu sein als die der anderen kritischen Zustände, da ja die Exponentialfunktion schließlich steiler als jede lineare Funktion anwächst. Ist jedoch die Anfangsamplitude der Biegeschwingung sehr klein, so wird die Schwingung zu Beginn nur sehr langsam aufgeschaukelt werden. In diesem Fall dürfte sich z. B. das Durchfahren eines kritischen Zustandes dritter Art kaum als gefährlich erweisen.

Weiter ist auch die Frage, inwieweit sich eine in Wirklichkeit stets vorhandene Dämpfung auf die Instabilität auswirkt, von Bedeutung. Um hier eine Antwort zu finden, müssen zunächst die Bewegungsgleichungen durch gewisse Dämpfungsglieder ergänzt werden. Wollte man dabei die Abhängigkeit der Dämpfungskräfte einerseits von der äußeren, andererseits von der inneren Dämpfung (Werkstoffdämpfung) genau angeben, so würde man auf erhebliche mathematische Schwierigkeiten stoßen. Die Rechnung wird einfacher, wenn man die Dämpfungskräfte als proportional zu den Geschwindigkeiten $\dot\eta$ und $\dot\zeta$ ansieht. Man wird dabei die Proportionalitätskonstanten so bestimmen, daß durch die wirklichen und die angenommenen Dämpfungskräfte je Schwingung dieselbe Energie verbraucht wird, und kann somit erwarten, daß der auf diese Weise berücksichtigte Einfluß der Dämpfung zu Ergebnissen führt, die wenigstens qualitativ mit der Wirklichkeit übereinstimmen.

Es werden also die Gleichungen (22) durch Glieder von der Form $\frac{2\,q^2\,\beta}{\Omega}\frac{d\eta_D}{d\tau}$ und $\frac{2\,q^2\,\beta}{\Omega}\frac{d\zeta_D}{d\tau}$, wobei β eine Dämpfungskonstante ist, zu

$$q^2\frac{d^2\eta_D}{d\tau^2} + \frac{2\,q^2\,\beta}{\Omega}\frac{d\eta_D}{d\tau} + (1 - \varepsilon\cos\tau)\,\eta_D = \psi\,(1 - \varepsilon\cos\tau)\left(\cos\frac{\tau}{\nu} + \vartheta\right), \tag{82a}$$

$$q^2\frac{d^2\zeta_D}{d\tau^2} + \frac{2\,q^2\,\beta}{\Omega}\frac{d\zeta_D}{d\tau} + (1 - \varepsilon\cos\tau)\,\zeta_D = \psi\,(1 - \varepsilon\cos\tau)\left(\sin\frac{\tau}{\nu} + \vartheta\right) \tag{82b}$$

[1] *K. Klotter* u. *G. Kotowski*, Z. angew. Math. Mech. 23 (1943) S. 154.

ergänzt. Für die erste der beiden Gleichungen läßt sich auch mittels des Ansatzes (57) ein partikuläres Integral gewinnen, das wieder die kritischen Zustände erster und zweiter Art beschreibt. Die Ergebnisse weichen jedoch hier von denen des Abschnittes 4 etwas ab, weil dort bei Resonanz die Ausschläge unbegrenzt anwachsen, während sie hier nur bis zu einem bestimmten endlichen Wert zunehmen. Ferner werden die kritischen Drehzahlen etwas kleiner, sobald eine Dämpfungskraft wirkt. Jedoch dürfte dieses Absinken bei normalerweise vorkommenden Dämpfungen kaum merkbar sein. Da der Unterschied zwischen Resonanzerscheinungen bei ungedämpften und gedämpften Schwingungen wohlbekannt ist, erübrigt es sich, diesen noch eingehender zu betrachten. Um die bei kritischen Zuständen dritter Art durch die Dämpfung hervorgerufenen Änderungen erkennen zu können, muß noch die allgemeine Lösung der zu (82a) gehörenden verkürzten Differentialgleichung

$$q^2 \frac{d^2\eta_D^*}{d\tau^2} + \frac{2\,q^2\,\beta}{\Omega} \frac{d\eta_D^*}{d\tau} + (1 - \varepsilon \cos\tau)\,\eta_D^* = 0 \tag{83}$$

aufgesucht werden. Diese geht mittels der Transformation

$$\eta_D^*(\tau) = e^{-\frac{\beta}{\Omega}\tau}\,\delta(\tau) \tag{84}$$

in die Gleichung

$$q^2 \frac{d^2\delta}{d\tau^2} + \left(1 - \varepsilon \cos\tau - \frac{\beta^2}{\Omega^2}\,q_2\right)\delta = 0 \tag{85}$$

über, in der die erste Ableitung der unbekannten Funktion fehlt.

Bevor die Gleichung (85) weiterbehandelt wird, soll noch der Dämpfungsfaktor β zahlenmäßig abgeschätzt werden. Dazu bringt man ihn mit dem logarithmischen Dekrement Λ, dessen Größenordnungen eher bekannt sind, in Verbindung. Es ist definitionsgemäß

$$\Lambda = \ln \frac{e^{-\beta t}}{e^{-\beta\left(t + \frac{2\pi}{\omega_k}\right)}} = \frac{2\,\pi}{\omega_k}\beta \tag{86}$$

und damit

$$\frac{\beta^2}{\Omega^2}\,q^2 = \frac{\Lambda^2}{4\,\pi^2}. \tag{87}$$

Handelt es sich um Wellen aus Metall, so ist[1] immer $\Lambda < 10^{-2}$. Folglich ist der Ausdruck (87) sehr viel kleiner als eins. Schreibt man mit

$$q_1^2 = \frac{q^2}{1 + \frac{\beta^2}{\Omega^2}\,q^2} \qquad \text{und} \qquad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{1 + \frac{\beta^2}{\Omega^2}\,q^2}$$

die Gleichung (85) um in

$$q_1^2 \frac{\partial^2\delta}{\partial\tau^2} + (1 - \varepsilon_1 \cos\tau)\,\delta = 0\,,$$

so ist sie formal mit (75a) identisch. Nach (76), (84) und (87) lautet also die allgemeine Lösung der Gleichung (83)

$$\eta_D^* = e^{-\frac{\Lambda}{2\pi q}\tau}\left(C_1\,e^{\sigma\tau} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m\,e^{i\,m\,\tau} + C_2\,e^{-\sigma\tau} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m\,e^{-i\,m\,\tau}\right), \tag{88}$$

wobei sich der Wert des charakteristischen Exponenten σ in (88) von dem in (76) wegen $q_1 \approx q$ und $\varepsilon \approx \varepsilon_1$ nur vernachlässigbar wenig unterscheidet. Für die Stabilität ist also jetzt nicht mehr der Realteil a des charakteristischen Exponenten σ sondern die Größe $a - \Lambda/2\,\pi\,q$ maßgebend. Es herrscht nämlich nur dann Instabilität, falls $a - \Lambda/2\,\pi\,q > 0$ ist. Damit lassen sich nun für jedes gegebene Λ die Instabilitätsbereiche eingrenzen. Man zeichnet in Abb. 5 die waagrechte Gerade $2\,\pi\,a\,q = \Lambda$ ein und markiert ihre Schnittpunkte mit den bereits gezeichneten Halbovalen. Sodann überträgt man diese Punkte in eine (ε, q)-Ebene und verbindet sie zu einer stetigen Kurve, die dann die Stabilitätsgebiete von den Instabilitätsgebieten trennt (siehe Abb. 7). Daß sich die so gewonnenen Grenzkurven für nicht zu kleine ε und kleine Λ kaum von den ursprünglichen Grenzkurven ($\Lambda = 0$) unterscheiden, erkennt man an Abb. 5. Für kleine ε ergibt sich jedoch eine merkwürdige Erscheinung. Jede Gerade $2\,\pi\,a\,q = \Lambda$ wird in Abb. 5 von bestimmten Halbovalen berührt. Die zu diesen gehörenden Parameter sind sogenannte Schwellwerte ε_0, denn alle Halbovale mit Para-

[1] *F. Förster* und *W. Köster*, Z. f. Metallk. 29 (1937) S. 116.

metern $\varepsilon < \varepsilon_0$ liegen unter der Geraden $2\pi a q = \Lambda$. Sobald also eine Dämpfung vorhanden ist, reichen demnach die Instabilitätsbereiche nicht mehr bis zur q-Achse hinab, sondern nur noch bis in die Höhe ε_0 (siehe Abb. 7 und 8). Für die ersten drei Instabilitätsbereiche lassen sich bei gegebenem Λ die dazugehörenden ε_0-Werte aus Abb. 6 entnehmen. Man hat dazu nur die Gerade $(2\pi a q)_{max} = \Lambda$ mit den dort gezeichneten Kurven zu schneiden und erhält dann die Schwellwerte als Abszissen der Schnittpunkte.

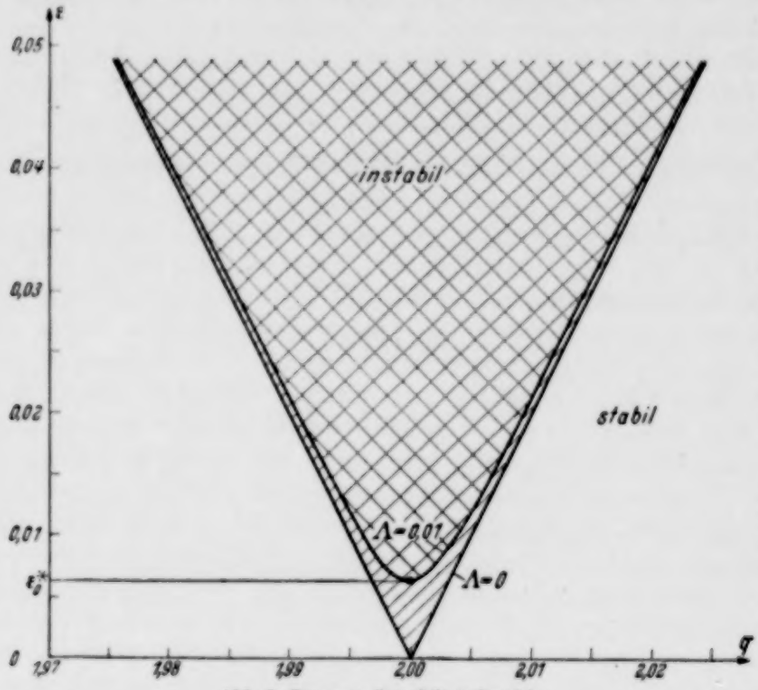


Abb. 7. Der erste Instabilitätsbereich.

In Abb. 7 und 8 sind für $\Lambda = 0$ und $\Lambda = \Lambda^* = 0{,}01$ die Grenzkurven der ersten zwei Instabilitätsbereiche gezeichnet. Mit ihnen läßt sich der Einfluß der Dämpfung insofern abschätzen, als man annehmen darf, daß bei Biegeschwingungen von Metallwellen immer $\Lambda < \Lambda^*$ ist und somit auch die zu Λ gehörenden Werte ε_0 kleiner sind als der zu Λ^* gehörende Schwellwert ε_0^* (Abb. 6, 7 und 8). Da sich außerdem zwei Grenzkurven nicht schneiden können[1], so müssen für Dämpfungen mit $0 < \Lambda < \Lambda^*$ alle Grenzkurven in den einfach schraffierten Gebieten von Abb. 7 bzw. 8 liegen.

Berechnet man die Schwellwerte ε_0^* für die ersten drei Instabilitätsbereiche, so erhält man nacheinander $\varepsilon_0^* = 0{,}0064$, $\varepsilon_0^* = 0{,}11$ und $\varepsilon_0^* = 0{,}26$. Es wird also der Schwellwert im ersten Instabilitätsbereich sehr klein sein, während für die nächstfolgenden Instabilitätsbereiche ε_0 stark anwächst, was auch in Abb. 6 zum Ausdruck kommt.

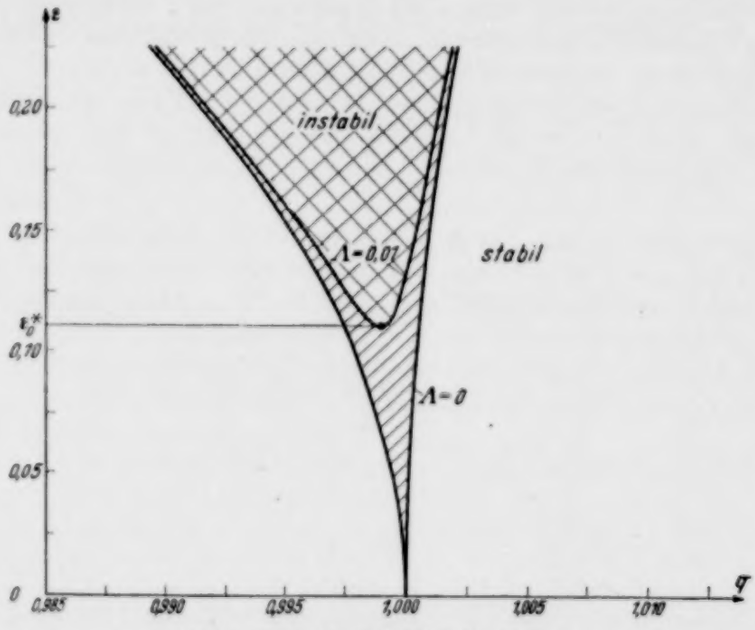


Abb. 8. Der zweite Instabilitätsbereich.

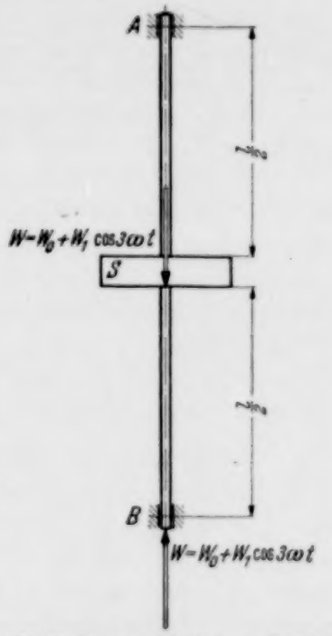


Abb. 9. Rotor und Belastung der Welle.

Nachdem man nun übersieht, wie sich die Dämpfung auf die Stabilitätsverhältnisse auswirkt, sei zusammenfassend festgestellt, daß bei einem gedämpften Schwinger nur dann Instabilität möglich ist, wenn ε oberhalb eines bestimmten Schwellwertes ε_0 liegt. Dieser ist bei dem ersten Instabilitätsbereich sehr klein, weshalb hier schon eine verhältnismäßig schwache pulsierende Belastung ausreicht, um Biegeschwingungen aufzuschaukeln. Bei den übrigen Instabilitätsbereichen

[1] *N. W. McLachlan*, a. a. O. S. 80—81.

wird ε_0 um so größer, der Bereich also um so ungefährlicher, je näher er an der ε-Achse liegt. Für das Anwachsen der Lösung $\eta_D^*(\tau)$ mit der Zeit ist nicht mehr wie im ungedämpften Fall das Produkt $a\,\Omega$ maßgebend, sondern die Größe $(2\,\pi\,a\,q - \Lambda)\,\omega_k/2\,\pi$. Das bedeutet, daß die Ausweichgeschwindigkeit der Scheibe durch eine Dämpfung stets herabgesetzt wird.

7. Zwei Zahlenbeispiele. Die dargestellten Zusammenhänge sollen nun noch an zwei Zahlenbeispielen verdeutlicht werden.

Eine beiderseits gelagerte Welle vom Durchmesser $d = 3$ mm trägt in ihrer Mitte ein $G = 0{,}1$ kg schweres Antriebsrad (Abb. 9). Der gleichgroße Abstand vom Gleitlager A bzw. B bis zur Einspannstelle am Rad S sei $l/2 = 120$ mm. Das Wellenstück AS wird durch ein pulsierendes Torsionsmoment $W = W_0 + W_1 \cos 3\,\omega\,t$ beansprucht, herrührend von einem mit derselben Frequenz harmonisch schwankenden Antriebsmoment der Scheibe S. Wie groß sind die kritischen Drehzahlen, wenn $W_0 = 8$ cmkg, $W_1 = 0{,}2$ cmkg und der Elastizitätsmodul $E = 2{,}15 \cdot 10^6$ kg/cm² ist?

Zur Beantwortung dieser Frage geht man von der hier durchaus berechtigten Annahme aus, daß die Masse der Welle gegenüber derjenigen des Antriebsrades vernachlässigbar ist. Nach (16) und (18) ergibt sich die kritische Drehgeschwindigkeit ω_k der nur mit W_0 vorbelasteten Werte zu

$$\omega_k = \sqrt{\frac{1 - \varkappa_2\,\mu_0^2}{m\,\alpha_0}}\,. \tag{89}$$

Da für die gegebenen Zahlenwerte $\varkappa_2\,\mu_0^2 \ll 1$ ist, kann man in guter Näherung auch

$$\omega_k = \omega_0 \frac{1}{\sqrt{m\,\alpha_0}} \tag{90}$$

setzen. Dabei findet man die Einflußzahl

$$\alpha_0 = \frac{1}{3\,\pi}\,\frac{l^3}{E\,d^4} = 0{,}08422\,\frac{\text{cm}}{\text{kg}}, \tag{91}$$

wenn man in Anbetracht der geringen Wellendicke die Gleitlager A und B als starr und damit die Welle als beiderseits eingespannt ansieht[1]; für die Radmasse erhält man $m = 1{,}019 \cdot 10^{-4}$ kgsek²/cm und somit nach (90) den Zahlenwert

$$\omega_k = 341{,}2\ \text{sek}^{-1}. \tag{92}$$

Die kritischen Zustände erster und zweiter Art treten nun bei den durch die Gleichungen (62) und (68) mit $\nu = 3$ bestimmten Winkelgeschwindigkeiten

$$\omega = \omega_k = 341{,}2\ \text{sek}^{-1} \qquad \text{und} \qquad \omega = \frac{\omega_k}{3\,n \pm 1} = \frac{341{,}2}{3\,n \pm 1}\ \text{sek}^{-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{93}$$

auf, aus denen die minutliche kritische Drehzahl erster Art

$$N = \frac{30}{\pi}\,\omega_k = 3258\ \frac{\text{Uml.}}{\text{min}} \tag{94}$$

und die nicht so gefährlichen, in Tabelle 2 aufgeführten kritischen Drehzahlen zweiter Art folgen.

Tabelle 2

n	1	2	3	4	5	
N	1629 815	651 465	408 325	216 250	232 203	} $\frac{\text{Uml.}}{\text{min}}$

Um die kritischen Drehzahlen dritter Art bestimmen zu können, berechnet man zunächst die Größe ε. Mit (21), (12) und dem aus der Tabelle 1 entnommenen Zahlenwert $\varkappa_2 = 0{,}0034$ erhält man

$$\varepsilon = 2\,\varkappa_2\,W_0\,W_1\left(\frac{l}{EJ}\right)^2 = 1{,}05 \cdot 10^{-5}. \tag{95}$$

Da dieser Wert sehr klein ist, können nach Abb. 4 nur in unmittelbarer Nähe von $q = 2/m$ ($m = 1, 2, \ldots$), also nach (21) bei den Winkelgeschwindigkeiten

$$\omega = \frac{2}{3\,m}\,\omega_k \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{96}$$

[1] Hütte, Bd. 1, S. 666, 27. Aufl. Berlin 1949.

kritische Zustände dritter Art auftreten. Die den Winkelgeschwindigkeiten (96) entsprechenden minutlichen Drehzahlen ergeben sich für $m = 1, 2, 3$ zu

$$2172\,\frac{\text{Uml.}}{\text{min}}, \qquad 1086\,\frac{\text{Uml.}}{\text{min}}, \qquad 724\,\frac{\text{Uml.}}{\text{min}}. \tag{97}$$

Ob bei diesen jedoch tatsächlich Biegeschwingungen aufgeschaukelt werden, hängt noch von der Dämpfung ab. Bei einem logarithmischen Dekrement $\Lambda = 0{,}01$ würden sich z. B. keinerlei Instabilitätserscheinungen zeigen; denn in diesem Fall wäre bereits der Schwellwert des ersten Instabilitätsbereichs erheblich größer als $\varepsilon = 1{,}05 \cdot 10^{-5}$ (Abb. 7). Es ist aber anzunehmen, daß für Schwingungen mit sehr kleiner Amplitude auch Λ äußerst klein ist und erst bei größeren Amplituden einen Wert von der Größenordnung 10^{-3} bis 10^{-2} annimmt. Es werden sich daher in einem kritischen Zustand die Amplituden der Biegeschwingungen nur so lange aufschaukeln, bis das logarithmische Dekrement den Wert $\Lambda = (2\pi a q)_{max} = 1{,}65 \cdot 10^{-5}$ erreicht hat, und dann konstant bleiben. Die Drehzahlen (97) werden sich demnach nur durch einen etwas unruhigen Lauf der Welle bemerkbar machen.

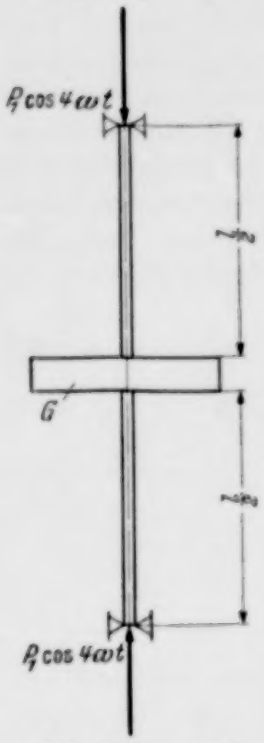


Abb. 10. Rotor und Belastung der Welle.

Als zweites Beispiel wird eine beiderseits gelenkig gelagerte Welle von der Länge $l = 40$ cm und der Biegefestigkeit $E\,J = 40\,000$ kgcm² betrachtet, die in ihrer Mitte eine Scheibe vom Gewicht $G = 4$ kg trägt (Abb. 10) und mit einer axialen, harmonisch schwankenden Druckkraft $P = P_1 \cos 4\,\omega\,t$ belastet ist, wobei $P_1 = 10$ kg ist.

Mit der Einflußzahl

$$\alpha_0 = \frac{1}{48}\,\frac{l^3}{E\,J} = 0{,}0333\,\frac{\text{cm}}{\text{kg}} \tag{98}$$

und der Scheibenmasse $m = 4{,}077$ kg sek²/cm erhält man aus (62), (18) und (16) die kritische Drehgeschwindigkeit erster Art

$$\omega_k = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{m\,\alpha_0}} = 85{,}78\ \text{sek}^{-1}, \tag{99}$$

die einer minutlichen Drehzahl von

$$N = \frac{30}{\pi}\,\omega_0 = 819\,\frac{\text{Uml.}}{\text{min}} \tag{100}$$

entspricht.

Nach Abschnitt 4 sind hier für die Drehgeschwindigkeiten

$$\omega = \frac{\omega_0}{4\,n \pm 1} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{101}$$

kritische Zustände zweiter Art zu erwarten. Die zu diesen gehörenden kritischen Drehzahlen sind für $n = 1, 2, 3$ in Tabelle 3 angegeben.

Die Instabilitätsverhältnisse lassen sich übersehen, sobald man ε berechnet hat. Man findet mit den gegebenen Zahlenwerten und dem aus Tabelle 1 entnommenen Wert $\varkappa_1 = 0{,}10$

Tabelle 3

n	1	2	3	
N	273 164	117 91	74 63	$\frac{\text{Uml.}}{\text{min}}$

$$\varepsilon = \varkappa_1\,\frac{P_1\,l}{E\,J} = 0{,}040\,. \tag{102}$$

Aus Abb. 7 ist ersichtlich, daß der Wert (102) für $\Lambda = 0{,}01$ zwar den Schwellwert $\varepsilon_0^* = 0{,}0064$ des ersten Instabilitätsbereichs übertrifft, jedoch bereits kleiner als der Schwellwert $\varepsilon_0^* = 0{,}11$ des zweiten Instabilitätsbereichs ist. Demnach werden also nur in einem sehr kleinen Bereich um $q = 2$ bzw.

$$\omega = \frac{\omega_0}{2} = 42{,}89\ \text{sek}^{-1} \tag{103}$$

Biegeschwingungen aufgeschaukelt. Da aber Λ wohl stets kleiner als 0,01 sein wird, ist damit zu rechnen, daß auch noch der zweite Instabilitätsbereich mit dem Fußpunkt $q = 1$ gefährlich werden kann. Mit $\Lambda = 0{,}001$ ergibt sich z. B. für den zweiten Instabilitätsbereich ein Schwellwert $\varepsilon_0 = 0{,}03 < \varepsilon = 0{,}04$. In diesem Fall stellt sich also nicht nur bei der Drehgeschwindigkeit (103)

ein kritischer Zustand dritter Art ein, sondern auch in unmittelbarer Nähe der Drehgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{\omega_0}{4} = 21{,}44 \text{ sek}^{-1} . \tag{104}$$

Es folgen daher aus (103) und (104) die kritischen Drehzahlen dritter Art

$$N = \frac{30}{\pi} \frac{\omega_0}{2} = 410 \frac{\text{Uml.}}{\text{min}} \tag{105}$$

und

$$N = \frac{30}{\pi} \frac{\omega_0}{4} = 205 \frac{\text{Uml.}}{\text{min}} . \tag{106}$$

Über die bei diesen zu erwartenden Ausweichgeschwindigkeiten gibt der Exponent $[(2\pi a q)_{max} - \Lambda]\, \omega_k/2\pi$ Auskunft. Die Gleichung (79) liefert für $\varepsilon = 0{,}04$ und $q = 2$ den Wert $(2\pi a q)_{max} = 0{,}063$ und für $\varepsilon = 0{,}04$ und $q = 0{,}99987$ den Wert $(2\pi a q)_{max} = 0{,}0013$. Für $\Lambda = 0{,}001$ erhält man damit im ersten Instabilitätsbereich

$$[(2\pi a q)_{max} - \Lambda] \frac{\omega_0}{2\pi} = 0{,}846 \tag{107}$$

und im zweiten

$$[(2\pi a q)_{max} - \Lambda] \frac{\omega_0}{2\pi} = 0{,}00355 . \tag{108}$$

Die Amplitude der Biegeschwingung wächst also im ersten Instabilitätsbereich in jeder Sekunde auf das $e^{0{,}846} = 2{,}32$-fache ihres Betrages an und erreicht so bereits nach 8,2 Sekunden das tausendfache ihres Anfangsausschlages. Im zweiten Instabilitätsbereich dagegen steigt der Betrag der Amplitude in jeder Sekunde nur auf das $e^{0{,}00355} = 1{,}00355$-fache, so daß es hier etwa 1930 Sekunden dauert, bis sie tausendmal größer ist als ihre Anfangsamplitude.

Da im Maschinenbau kaum Fälle vorkommen, die zu viel größeren ε-Werten führen, als sie das letzte Zahlenbeispiel geliefert hat, darf man aus diesem wohl folgern, daß außer dem ersten Instabilitätsbereich nur noch der zweite beachtet werden muß und daß wegen der kleinen ε beide Bereiche fast punktförmig sind und in unmittelbarer Nähe von $q = 2$ bzw. $q = 1$ liegen.

8. Zusammenfassung. Wird eine mit einer einzelnen Scheibe besetzte, masselose Welle mit einer periodischen Längskraft $P_0 + P_1 \cos \Omega t$ oder mit einem periodischen Torsionsmoment $W_0 + W_1 \cos \Omega t$ belastet, so ergibt es unter der Annahme, daß bei umlaufenden Wellen die Frequenz Ω mit der Drehzahl ω der Welle gemäß der Beziehung $\Omega = \nu\, \omega$ gekoppelt ist, auch bei konstantem und um so mehr bei rein harmonisch periodischem Antriebsmoment der Scheibe neben der kritischen Drehgeschwindigkeit erster Art $\omega = \omega_k$ unendlich viele kritische Zustände zweiter Art bei den Drehgeschwindigkeiten $\omega = \omega_k / | n\nu \pm 1 |$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, falls die Scheibe etwas exzentrisch auf die Welle gekeilt ist. Die Gefährlichkeit der kritischen Drehzahlen zweiter Art ist jedoch viel geringer als die der kritischen Drehzahl erster Art.

Außer den genannten kritischen Drehzahlen ergeben sich ohne Dämpfung noch unendlich viele kritische Drehzahlbereiche in der Nähe des $2/m\nu$-fachen der kritischen Drehzahl ω_k, in denen die mit der Scheibe besetzte Welle exponentiell mit der Zeit anwachsende Biegeschwingungen ausführt. Die Breite dieser Bereiche und die Ausweichgeschwindigkeit der Scheibe nehmen mit wachsendem P_1 bzw. W_1 zu. Da die Ausweichgeschwindigkeit exponentiell mit der Zeit anwächst, unterscheiden sich diese neuen kritischen Drehzahlen dritter Art wesentlich von den kritischen Drehzahlen erster und zweiter Art, bei denen die Scheibe ja mit konstanter Geschwindigkeit ausweicht. Dieser Unterschied kommt besonders dann zur Geltung, wenn man noch den Einfluß einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung berücksichtigt. Eine solche begrenzt bei den kritischen Zuständen erster und zweiter Art das seitliche Ausweichen der Scheibe, während bei den neu gefundenen kritischen Drehzahlen dritter Art die Amplitude der Biegeschwingung nach wie vor unbegrenzt anwächst. Allerdings fallen infolge der Dämpfung die Bereiche mit höheren Ordnungszahlen m weg, und die übrigen werden um so kleiner, je größer die dazugehörende Ordnungszahl m ist. In der Praxis müssen — wie an zwei Zahlenbeispielen gezeigt wurde — ein erster Linie die Instabilitätsbereiche beachtet werden, die in der Nähe von $2\,\omega_k/\nu$ und ω_k/ν liegen.

(Eingegangen am 1. Juni 1956)

Anschrift des Verfassers: Dipl.-Phys. *W. Keller*, Schwäb.-Hall, Auf dem Klingenberg 5

Über die Biegung des orthotropen Plattenstreifens durch Einzellasten

Von S. Woinowsky-Krieger

1. Einleitung. Die Theorie der Biegung orthotroper Platten hat in letzten Jahren im Hinblick auf ihre Anwendung auf die Berechnung von Hohlplatten, von Brücken-Fahrbahnplatten[1] verschiedener Art und auch von Trägerrosten[2] eine größere Bedeutung erlangt. Die im wesentlichen von *M. Huber*[3] herrührende Theorie orthotroper Rechteckplatten führt auf Momenten- und Querkraftausdrücke in Form von einfachen *Fourier*-Reihen, die, wenn es sich um die nähere Umgebung stark konzentrierter Einzellasten handelt, nur sehr langsam konvergieren. Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, die technisch wichtigsten Ergebnisse der *Huber*schen Theorie in geschlossener Form darzustellen, um auf diese Weise ihre Anwendung zu vereinfachen.

2. *Huber*sche Lösung für den freiaufliegenden Plattenstreifen. Die Differentialgleichung der Biegefläche $w(x, y)$ einer orthotropen dünnen Platte lautet im Falle einer Einzellast

$$B_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 . \tag{1}$$

Hierbei sind B_1, B_2 und H gewisse, von den elastischen Eigenschaften der Platte bzw. des Trägerrostes abhängige Steifigkeiten[4]. Um alle möglichen Verhältniswerte dieser Steifigkeiten zu erfassen, setzen wir, im wesentlichen nach *Huber*,

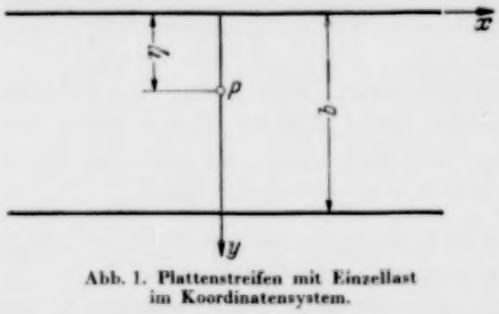


Abb. 1. Plattenstreifen mit Einzellast im Koordinatensystem.

$$\lambda = \sqrt{\frac{B_1}{B_2}}, \qquad \mu = \frac{H}{\sqrt{B_1 B_2}} \tag{2}$$

und weiterhin[5]

$$\left.\begin{aligned} \alpha \\ \beta \end{aligned}\right\} = \frac{b\lambda}{\pi}\sqrt{\mu \mp \sqrt{\mu^2 - 1}}\,, \qquad \text{wenn} \quad \mu > 1\,, \qquad \left.\begin{aligned} \alpha' \\ \beta' \end{aligned}\right\} = \frac{b\lambda}{\pi}\sqrt{\frac{2}{1 \pm \mu}}\,, \qquad \text{wenn} \quad \mu < 1\,. \tag{3}$$

Die elastische Fläche eines freiaufliegenden Plattenstreifens mit einer transversalen Einzellast in $x = 0$, $y = \eta$ (Abb. 1) drückt sich dann im Gebiete $x > 0$ folgendermaßen aus:

$$\text{Fall I,} \quad \mu > 1: \quad w = \frac{P b^3}{\pi^4 B_2} \frac{1}{\beta^2 - \alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n^3}\left(\beta\, e^{-\frac{n x}{\beta}} - \alpha\, e^{-\frac{n x}{\alpha}}\right) \sin\frac{n\pi\eta}{b} \sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{4,I}$$

$$\text{Fall II,} \quad \mu = 1: \quad w = \frac{P b^2}{2\pi^3 B_2 \lambda} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n^3}\left(1 + \frac{n\pi x}{b\lambda}\right) e^{-\frac{n\pi x}{b\lambda}} \sin\frac{n\pi\eta}{b} \sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{4,II}$$

$$\text{Fall III,} \quad \mu < 1: \quad w = \frac{P b}{2\pi^2 \sqrt{B_1 B_2}} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n^3}\left(\alpha' \cos\frac{n x}{\beta'} + \beta' \sin\frac{n x}{\beta'}\right) e^{-\frac{n x}{\alpha'}} \sin\frac{n\pi\eta}{b} \sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{4,III}$$

Der Fall II läßt sich im wesentlichen auf den Fall einer isotropen Platte zurückführen[6] und im praktisch ebenso wichtigen Falle III erhält man alle gewünschten Ausdrücke aus den für den Fall I geltenden Ausdrücken durch die Substitution

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha'} + \frac{i}{\beta'}, \qquad \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha'} - \frac{i}{\beta'} \tag{5}$$

[1] Siehe z. B. *H. Olsen* und *F. Reinitzhuber*, Die zweiseitig gelagerte Platte. Berlin 1950.

[2] Vgl. besonders *Y. Guyon*, Ann. Ponts et Chauss. (1946) S. 553 und *Ch. Massonet*, Abh. Intern. Vereinigung für Brückenbau u. Hochbau 10 (1950) S. 147.

[3] *M. T. Huber*, Probleme der Statik technisch wichtiger orthotroper Platten, insbesondere S. 42, Warschau 1929.

[4] Näheres über ihre Berechnung in verschiedenen Einzelfällen siehe bei *K. Girkmann*, Flächentragwerke, s. 475, Wien 1948.

[5] Für manche Umformungen erweist es sich als zweckmäßig im Falle I $\mu = \mathfrak{Cof}\, 2\omega$ und im Falle III $\mu = \cos 2\omega$ zu setzen; dann hat man $\alpha = e^{-\omega} b\lambda/\pi$, $\beta = e^{\omega} b\lambda/\pi$, $\alpha' = b\lambda/\pi \cos\omega$, $\beta' = b\lambda/\pi \sin\omega$.

[6] Vgl. *K. Girkmann*, Flächentragwerke S. 487, Wien 1948.

mit $i = \sqrt{-1}$. Im folgenden soll daher der formal einfachste Fall I stets als erster behandelt werden. Für die beiden Krümmungen erhalten wir in diesem Fall die folgenden Reihenausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{P\,b}{\pi^2 B_2 \lambda^2}\,\frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\sum_{n=1}^{\infty}{}'\,\frac{1}{n}\left(\alpha\, e^{-\frac{n\,x}{\beta}} - \beta\, e^{-\frac{n\,x}{\alpha}}\right)\sin\frac{n\,\pi\,\eta}{b}\,\sin\frac{n\,\pi\,y}{b}\,, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{P\,b}{\pi^2 B_2}\,\frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\sum_{n=1}^{\infty}{}'\,\frac{1}{n}\left(\alpha\, e^{-\frac{n\,x}{\alpha}} - \beta\, e^{-\frac{n\,x}{\beta}}\right)\sin\frac{n\,\pi\,\eta}{b}\,\sin\frac{n\,\pi\,y}{b}\,, \end{aligned}\right\} \quad (x>0)\,. \tag{6}$$

Die Biegemomente ergeben sich aus den Krümmungen mittels der Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} m_x &= -B_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_2\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\ m_y &= -B_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_1\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

mit den Querdehnungszahlen ν_1 und ν_2. Es genügt somit an Stelle der Momente weiter die Krümmungen allein näher zu betrachten.

3. Biegemomente und Schubkräfte in der Nähe einer Punktlast. Fall I. Die Entwicklung $\ln(1+t) = t - t^2/2 + t^3/3 - \cdots$ gestattet uns, den Reihenausdrücken (6) eine geschlossene Form zu geben Man erhält in der Tat durch wiederholte Anwendung der Summenformel[1]

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}'\,\frac{1}{n}\,e^{-\frac{n\,x}{\alpha}}\sin\frac{n\,\pi\,\eta}{b}\,\sin\frac{n\,\pi\,y}{b} = \frac{1}{4}\ln\frac{\mathfrak{Cof}\,\frac{x}{\alpha} - \cos\frac{\pi\,(y+\eta)}{b}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{x}{\alpha} - \cos\frac{\pi\,(y-\eta)}{b}} \tag{8}$$

folgende für den Fall I gültige logarithmische Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -\frac{P\,b}{4\,\pi^2\sqrt{B_1\,B_2}}\,\frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\left[\beta\,L(\alpha) - \alpha\,L(\beta)\right], \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{P\,b}{4\,\pi^2 B_2}\,\frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\left[\beta\,L(\beta) - \alpha\,L(\alpha)\right] \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

mit

$$L(\alpha) = \ln\frac{\mathfrak{Cof}\,\frac{x}{\alpha} - \cos\frac{\pi\,(y+\eta)}{b}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{x}{\alpha} - \cos\frac{\pi\,(y-\eta)}{b}} \tag{10}$$

und einem analogen Ausdruck für $L(\beta)$.

Fall II. Vergleicht man die elastische Fläche (4,II) mit der elastischen Fläche eines isotropen Plattenstreifens im selben Belastungsfall, also mit der Fläche

$$w = \frac{P\,b^2}{2\,\pi^3 B}\sum_{n=1}^{\infty}{}'\,\frac{1}{n^3}\left(1 + \frac{n\,\pi\,x}{b}\right)e^{-\frac{n\,\pi\,x}{b}}\sin\frac{n\,\pi\,\eta}{b}\,\sin\frac{n\,\pi\,y}{b}\,, \tag{11}$$

wo B die Biegesteifigkeit der isotropen Platte sein soll, so sieht man, daß man von der Fläche (11) direkt auf die Fläche (4,II) schließen kann, indem man in (11) x durch x/λ und B durch $B_2\,\lambda$ ersetzt. Die wohlbekannten Ausdrücke für die Krümmungen des isotropen Plattenstreifens[2] gehen dann über in

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -\frac{P\,\lambda}{8\,\pi\,B_1}\,L + \frac{P\,\lambda\,x}{8\,B_1\,b}\,S\,, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{P}{8\,\pi\,B_2\,\lambda}\,L - \frac{P\,\lambda\,x}{8\,B_1\,b}\,S \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

[1] Siehe z. B. *W. Magnus* und *F. Oberhettinger*, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, S. 214, Berlin 1948.

[2] Vgl. z. B. *A. Nadai*, Die elastischen Platten, S. 86, 95. Berlin 1925.

mit den Abkürzungen

$$L = \ln \frac{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi x}{b\lambda} - \cos\frac{\pi(y+\eta)}{b}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi x}{b\lambda} - \cos\frac{\pi(y-\eta)}{b}}$$

und

$$S = \frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi x}{b\lambda}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi x}{b\lambda} - \cos\frac{\pi(y-\eta)}{b}} - \frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi x}{b\lambda}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi x}{b\lambda} - \cos\frac{\pi(y+\eta)}{b}}. \qquad (13)$$

Fall III. Mit Hilfe der Substitution (5) ergeben sich aus den Gleichungen (9) und (10) die folgenden Ausdrücke für die Krümmungen

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{P}{8\,b\,B_1}\left[\alpha' \ln\frac{\varrho_1}{\varrho_2} + \beta'(\varphi_1 - \varphi_2)\right],$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{P}{8\,b\sqrt{B_1 B_2}}\left[\alpha' \ln\frac{\varrho_1}{\varrho_2} - \beta'(\varphi_1 - \varphi_2)\right], \qquad (14)$$

worin

$$\left.\begin{matrix}\varrho_1^2\\ \varrho_2^2\end{matrix}\right\} = \left[\mathfrak{Cof}\,\frac{x}{\alpha'}\cos\frac{x}{\beta'} - \cos\frac{\pi(y \pm \eta)}{b}\right]^2 + \mathfrak{Sin}^2\frac{x}{\alpha'}\sin^2\frac{x}{\beta'} \qquad (15)$$

und

$$\left.\begin{matrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{matrix}\right\} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{x}{\alpha'}\sin\frac{x}{\beta'}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{x}{\alpha'}\cos\frac{x}{\beta'} - \cos\frac{\pi(y \pm \eta)}{b}} \qquad (16)$$

sein soll.

Die Ausdrücke (9), (12) und (14) in Verbindung mit den Gleichungen (7) erlauben die Biegemomente der Platte in beliebiger Nähe von der Punktlast zu berechnen. Zur Berechnung der Scherkräfte braucht man nur die jeweiligen Ausdrücke für $\partial^2 w/\partial x^2$ und $\partial^2 w/\partial y^2$ in die Formeln

$$q_x = -B_1\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \left(H + \frac{B_1\nu_2 - B_2\nu_1}{2}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2},$$
$$q_y = -B_2\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \left(H + \frac{B_2\nu_1 - B_1\nu_2}{2}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y} \qquad (17)$$

einzusetzen und die Differentiation auszuführen.

4. Biegemoment im Schwerpunkt einer belasteten Fläche. In den technischen Anwendungen der Plattentheorie sind die Einzellasten stets auf eine Fläche, meist einen Kreis oder ein Rechteck verteilt. Sind die Abmessungen dieser Druckfläche klein im Verhältnis zu der kleinsten Entfernung der Last vom Plattenrand, aber nicht klein im Verhältnis zu der Plattendicke[1], so können die nunmehr endlichen Werte der Biegemomente im Schwerpunkt der Lastfläche auf Grund der Ergebnisse des vorhergehenden Abschnittes unschwer berechnet werden. Die weiter abgeleiteten Momentenformeln gelten zwar nicht streng, aber mit einer für technische Zwecke völlig ausreichenden Genauigkeit.

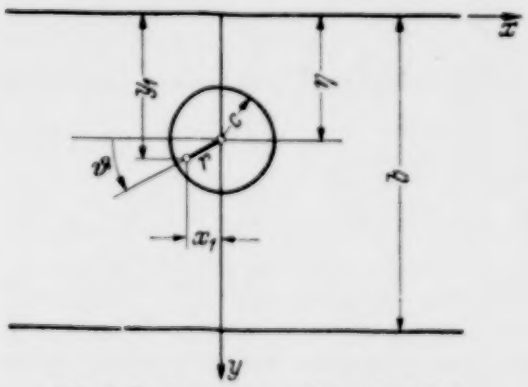


Abb. 2. Lastverteilung auf eine Kreisfläche.

Als Beispiel wählen wir eine gleichförmige Verteilung der Last P auf eine Kreisfläche vom Halbmesser c (Abb. 2) und beginnen mit dem

Fall I, $\mu > 1$. Eine elementare im Punkt $(-x_1, y_1)$ wirkende Last von der Größe $dp = P\,dx\,dy/\pi c^2$ erzeugt im Mittelpunkt des Kreises $(0, y)$ Krümmungen der elastischen Fläche, die sich nach den Formeln (9), (12) oder (14) leicht ausdrücken lassen.

Da nun die Entfernungen x_1, und

$$z = y_1 - \eta \qquad (18)$$

[1] In diesem Fall wäre die Theorie der dicken orthotropen Platte zur Berechnung der Beanspruchungen heranzuziehen.

der Voraussetzung gemäß klein sind gegen b, so dürfen wir zunächst in der Gleichung (10)

$$\left.\begin{aligned} \cos\frac{x_1}{\alpha} &\sim 1+\frac{x_1^2}{2\alpha^2}, \\ \cos\frac{\pi(y_1-\eta)}{b} &\sim 1-\frac{\pi^2 z^2}{2b^2}, \\ \cos\frac{\pi(y_1+\eta)}{b} &\sim \cos\frac{2\pi\eta}{b}=1-2\sin^2\frac{\pi\eta}{b} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

setzen. Mit diesen Vereinfachungen wird

$$L(\alpha)=2\ln\left(2\sin\frac{\pi\eta}{b}\right)-\ln\left(\frac{x_1^2}{\alpha^2}+\frac{\pi^2 z^2}{b^2}\right) \tag{20}$$

und analog drückt sich $L(\beta)$ aus. Zur Vereinfachung der nachfolgenden Integration gehen wir noch zu Polarkoordinaten über und setzen

$$x_1=r\cos\vartheta\,,\quad z=r\sin\vartheta\,,\quad dx\,dy=dx\,dz=r\,dr\,d\vartheta\,, \tag{21}$$

wonach sich

$$dp=\frac{P}{\pi c^2}r\,dr\,d\vartheta \tag{22}$$

ergibt. Multiplizieren wir nun beide Teile der Gleichung (20) mit dp und integrieren über die Lastfläche, so berechnet sich hieraus der neue Wert von $L(\alpha)$ zu

$$L_e(\alpha)=2\ln\left(2\sin\frac{\pi\eta}{b}\right)-\frac{4}{\pi c^2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{c}\left[\ln\left(\frac{r^2\cos^2\vartheta}{\alpha^2}+\frac{\pi^2 r^2\sin^2\vartheta}{b^2}\right)\right]r\,dr\,d\vartheta$$

oder, nach Ausführung der Integration, zu

$$L_e(\alpha)=2\ln\left(2\sin\frac{\pi\eta}{b}\right)+1-2\ln\frac{(\pi\alpha+b)\,c}{2\alpha b}\,. \tag{23}$$

Jetzt haben wir nur noch den Ausdruck $L_e(\alpha)$ und den analogen Ausdruck für $L_e(\beta)$ an die Stelle von $L(\alpha)$ bzw. von $L(\beta)$ in die Gleichung (9) einzusetzen. Nach einigen Umformungen kommt man dann zu den folgenden Ausdrücken für die Krümmungen im Mittelpunkt der Kreisfläche

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -\frac{Pb}{2\pi^2\sqrt{B_1 B_2}}\left[\frac{1}{\beta+\alpha}\ln\frac{4b\,e^{\frac{1}{2}}\sin\frac{\pi\eta}{b}}{\pi c}+\frac{\alpha\ln\left(1+\frac{b}{\pi\beta}\right)-\beta\ln\left(1+\frac{b}{\pi\alpha}\right)}{\beta^2-\alpha^2}\right], \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{Pb}{2\pi^2 B_2}\left[\frac{1}{\beta+\alpha}\ln\frac{4b\,e^{\frac{1}{2}}\sin\frac{\pi\eta}{b}}{\pi c}+\frac{\alpha\ln\left(1+\frac{b}{\pi\alpha}\right)-\beta\ln\left(1+\frac{b}{\pi\beta}\right)}{\beta^2-\alpha^2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Praktisch ist es von Wichtigkeit zu bemerken, daß das zweite Glied in den eckigen Klammern von der Lastenstellung, sowie der Lastkonzentration völlig unabhängig ist und sich als Funktion der beiden Steifigkeitszahlen λ und μ ein für allemal berechnen läßt.

Fall II, $\mu=1$. Hier kann man entweder in der soeben dargelegten Weise vorgehen oder aber die nachstehenden Ausdrücke als Grenzwerte aus (24) gewinnen. Das Ergebnis lautet

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -\frac{P\lambda}{4\pi B_1}\left[\ln\frac{4b\lambda\sin\frac{\pi\eta}{b}}{\pi c(\lambda+1)}+\frac{1}{2}-\frac{1}{\lambda+1}\right], \\ \frac{\partial u^2}{\partial y^2} &= -\frac{P}{4\pi B_2\lambda}\left[\ln\frac{4b\lambda\sin\frac{\pi\eta}{b}}{\pi c(\lambda+1)}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\lambda+1}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Mit $\lambda=1$ gehen die vorstehenden Formeln in die wohlbekannten von *A. Nadai* herrührenden Ausdrücke für den isotropen Plattenstreifen über. Das von *A. Nadai* benutzte Verfahren, den Spannungszustand des Plattenstreifens um die Einzellast herum mit dem einer zentrisch belasteten Kreisplatte zu vergleichen stößt bei der anisotropen Platte begreiflicherweise auf Schwierigkeiten[1]. Diese umgeht man am einfachsten durch direkte Integration über die genäherten Ausdrücke für

[1] Im vorliegenden Fall II ist das Problem gleichwertig mit dem Problem der Berechnung der Biegemomente eines isotropen Plattenstreifens im Mittelpunkt einer elliptischen Druckfläche.

die Krümmungen und gelangt auf diese Weise (im Falle der isotropen Platte) genau zu dem Ergebnis von *Nadai*.

Fall III, $\mu < 1$. Hier erspart man sich die nochmalige Integration durch Substitution der Ausdrücke (5) für $1/\alpha$ und $1/\beta$ in die Gleichungen (24). Die beiden Krümmungen drücken sich nun folgendermaßen aus

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -\frac{P}{4\,b\,B_1}\left(\alpha' \ln \frac{4\,b\,e^{\frac{1}{2}} \sin\frac{\pi\eta}{b}}{c} - \alpha' \ln \varrho - \beta' \varphi\right), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{P}{4\,b\sqrt{B_1 B_2}}\left(\alpha' \ln \frac{4\,b\,e^{\frac{1}{2}} \sin\frac{\pi\eta}{b}}{c} - \alpha' \ln \varrho + \beta' \varphi\right), \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

worin

$$\left.\begin{aligned} \varrho^2 &= \left(\pi + \frac{b}{\alpha'}\right)^2 + \frac{b^2}{\beta'^2}, \\ \varphi &= \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{\beta\left(\pi + \frac{b}{\alpha'}\right)} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

sein soll. Die Größen ϱ und φ hängen hier wiederum nur von den Zahlen λ und μ, d. h. von den elastischen Eigenschaften der Platte ab, nicht aber von der Stellung der Last und der Größe des Lastkreises.

5. Biegemomente einer Rippe. Soll eine orthotrope Platte näherungsweise einen Trägerrost oder ein System von Plattenbalken ersetzen, so interessiert in erster Linie das auf eine Rippe oder einen Träger anfallende Moment oder auch die Querkraft. Wir haben hier zwischen den Rippen der Richtung x (gegenseitiger Abstand u) und solchen der Richtung y (gegenseitiger Abstand v) zu unterscheiden. Zur Vereinfachung rechnen wir dabei mit einer im Schnittpunkt zweier Rippenachsen angreifenden Punktlast (Abb. 3). Wir beginnen mit der Bestimmung des Mittelwertes der Krümmungen $\partial^2 w/\partial x^2$ und $\partial^2 w/\partial y^2$ für eine Gesamtstrecke von v bzw. u in einer zum Angriffspunkt $(0, \eta)$ der Last symmetrischen Lage (Abb. 3).

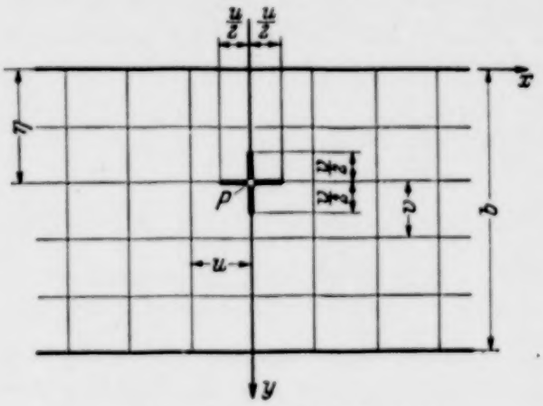


Abb. 3. Rippenplatte mit Einzellast.

Fall I, a) Rippen in der x-Richtung. Unter der Voraussetzung, daß die im Abschnitt 4 gemachten Vereinfachungen nach wie vor statthaft sind, haben wir in Gleichung (20) $x_1 = 0$ anzunehmen und alsdann den Ausdruck

$$L_x(\alpha) = \frac{1}{v}\int_{-v/2}^{v/2} L(\alpha)\,dz$$

zu bilden. In ähnlicher Weise bestimmt sich $L_x(\beta)$. Ersetzt man jetzt in den Gleichungen (9) $L(\alpha)$ und $L(\beta)$ durch $L(\alpha)$ bzw. durch $L_x(\beta)$, so erhält man die folgenden gemittelten Krümmungswerte:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_x &= -\frac{Pb}{2\,\pi^2\sqrt{B_1 B_2}}\,\frac{1}{\beta+\alpha}\ln\frac{4\,b\,e\sin\frac{\pi\eta}{b}}{\pi v}, \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_x &= -\frac{P\,b}{2\,\pi^2 B_2}\,\frac{1}{\beta+\alpha}\ln\frac{4\,b\,e\sin\frac{\pi\eta}{b}}{\pi v}. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

b) Rippen in der y-Richtung. In der Gleichung (20) wird jetzt $z = 0$ gesetzt, die Integration geht nach der Formel

$$L_y(\alpha) = \frac{2}{u}\int_0^{u/2} L(\alpha)\,dx$$

und das Ergebnis ist

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_y &= -\frac{P b}{2\pi^2\sqrt{B_1 B_2}}\left(\frac{1}{\beta+\alpha}\ln\frac{4 e \sin\frac{\pi\eta}{b}}{u}+\frac{\beta\ln\alpha-\alpha\ln\beta}{\beta^2-\alpha^2}\right),\\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_y &= -\frac{P b}{2\pi^2 B_2}\left(\frac{1}{\beta+\alpha}\ln\frac{4 e \sin\frac{\pi\eta}{b}}{u}+\frac{\beta\ln\beta-\alpha\ln\alpha}{\beta^2-\alpha^2}\right).\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Fall II, $\mu = 1$. Die nachstehenden Ergebnisse erhält man am einfachsten aus den Ausdrücken (28), (29) durch entsprechenden Grenzübergang[1].

a) Rippen in der x-Richtung:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_x &= -\frac{P\lambda}{4\pi B_1}\ln\frac{4 b e \sin\frac{\pi\eta}{b}}{n v},\\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_x &= -\frac{P}{4\pi B_2\lambda}\ln\frac{4 b e \sin\frac{\pi\eta}{b}}{\pi v}.\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

b) Rippen in der y-Richtung:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_y &= -\frac{P\lambda}{4\pi B_1}\ln\frac{4 b\lambda \sin\frac{\pi\eta}{b}}{\pi u},\\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_y &= -\frac{P}{4\pi B_2\lambda}\left(\ln\frac{4 b\lambda \sin\frac{\pi\eta}{b}}{\pi u}+2\right).\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Fall III, $\mu < 1$. Macht man wieder von der Substitution (5) Gebrauch, so liefern die Gleichungspaare (28) und (29) die folgenden Ausdrücke.

a) Rippen in der x-Richtung:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_x &= -\frac{P\alpha'}{4 b B_1}\ln\frac{4 b e \sin\frac{\pi\eta}{b}}{\pi v},\\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_x &= -\frac{P\alpha'}{4 b\sqrt{B_1 B_2}}\ln\frac{4 b e \sin\frac{\pi\eta}{b}}{\pi v}.\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

b) Rippen in der y-Richtung:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_y &= -\frac{P}{4 b B_1}\left(\alpha'\ln\frac{4 b e \sin\frac{\pi\eta}{b}}{\pi u}-\beta'\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha'}{\beta'}\right),\\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_y &= -\frac{P}{4 b\sqrt{B_1 B_2}}\left(\alpha'\ln\frac{4 b e \sin\frac{\pi\eta}{b}}{\pi u}+\beta'\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha'}{\beta'}\right).\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Die Biegemomente in den Rippen berechnen sich jetzt nach den folgenden, den Ausdrücken (7) entspringenden Formeln

$$\left.\begin{aligned}M_x &= -B_1 v\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_x+\nu_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_x\right],\\ M_y &= -B_2 u\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_y+\nu_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_y\right],\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

worin für die Krümmungen, dem jeweiligen Fall entsprechend die Ausdrücke (28) bis (33) einzusetzen sind. Es stünde nichts im Wege, durch entsprechende Integration über die Ausdrücke (17) analoge Formeln auch für die Rippen-Querkräfte zu erhalten.

6. Der in der Querseite eingespannte Halbstreifen mit einer Einzellast. Sehr einfache Resultate ergeben sich auch für den in Abb. 4a dargestellten Begrenzungsfall einer orthotropen Platte; die Ränder $y = 0$, b sind dabei nach wie vor frei aufliegend. Wir beginnen wieder mit dem

[1] Es ist dabei bequem, die in der Fußnote 5 S. 90 erwähnten Bezeichnungen einzuführen und zum Schluß $\omega \to 0$ zu setzen.

Fall I, $\mu > 1$ und betrachten als erstes einen vollen Plattenstreifen, der zwei gleiche aber entgegengesetzt gerichtete Punktlasten P nach Abb. 4b tragen möge. Die betreffende elastische Fläche ergibt sich sofort durch Superposition zweier Ausdrücke der Form(4, I), wobei in dem ersten x durch $\xi - x$, in dem zweiten, mit der negativen Einzellast, x durch $\xi + x$ zu ersetzen sind. Aus der hieraus resultierenden Fläche

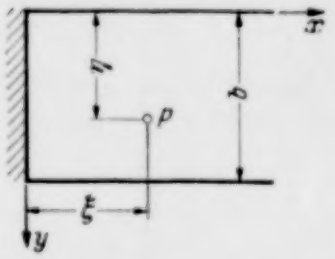
$$w_1 = \frac{2\,P\,b^3}{\pi^4\,B_2}\,\frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{1}{n^3}\left(\beta\,e^{-\frac{n\xi}{\beta}}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{n\,x}{\beta}-\alpha\,e^{-\frac{n\xi}{\alpha}}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{n\,x}{\alpha}\right)\sin\frac{n\,\pi\,\eta}{b}\sin\frac{n\,\pi\,y}{b}\quad(-\xi\leqq x\leqq\xi)\qquad(35)$$

oder auch unmittelbar aus der Abb. 4b folgt, daß die Durchbiegungen w_1 und die betreffenden Biegemomente auf $x = 0$ verschwinden. Für den so erhaltenen freigestützten Halbstreifen $x > 0$ berechnen wir noch die Neigung der Tangente

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{2\,P\,b^3}{\pi^4\,B_2}\,\frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{1}{n^2}\left(e^{-\frac{n\xi}{\beta}}-e^{-\frac{n\xi}{\alpha}}\right)\sin\frac{n\,\pi\,\eta}{b}\sin\frac{n\,\pi\,y}{b}\,.\qquad(36)$$

Um diese Neigung zum Verschwinden zu bringen, benützen wir eine Zusatzlösung $w_2\,(x, y)$, die der homogenen Differentialgleichung (1) genügen und außerdem eine Durchbiegung $w_2 = 0$ auf $x = 0$ ergeben soll. Eine solche Lösung ist

a



b

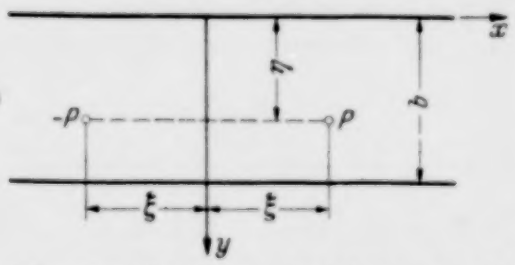


Abb. 4. Der auf der Seite $x = 0$ a) eingespannte und b) freigestützte Halbstreifen mit Einzellast.

$$w_2 = \sum_{n=1}^{\infty}{}' C_n\left(e^{-\frac{n\,x}{\beta}}-e^{-\frac{n\,x}{\alpha}}\right)\sin\frac{n\,\pi\,\eta}{b}\sin\frac{n\,\pi\,y}{b}\qquad(37)$$

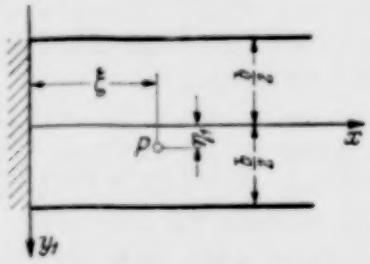


Abb. 5. Eingespannter Halbstreifen im neuen Koordinatensystem.

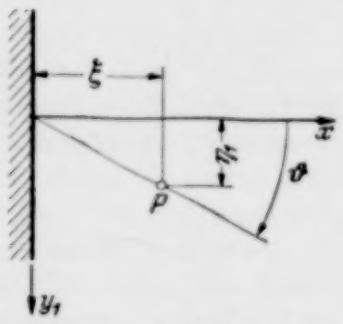


Abb. 6. Unendliche Kragplatte mit Einzellast.

mit gewissen willkürlichen Konstanten C_n für jedes $n = 1, 2, 3, \ldots$ Nun ist

$$\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty}{}' C_n\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)n\sin\frac{n\,\pi\,\eta}{b}\sin\frac{n\,\pi\,y}{b}\qquad(38)$$

und die Bedingung $\partial w_1/\partial x + \partial w_2/\partial x = 0$ bei $x = 0$ liefert erst die Konstanten C_n und alsdann die gesuchte Zusatzlösung

$$w_2 = -\frac{2\,P\,b^3}{\pi^4\,B_2}\,\frac{\alpha\,\beta}{(\beta-\alpha)\,(\beta^2-\alpha^2)}\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{1}{n^3}\left(e^{-\frac{n\xi}{\beta}}-e^{-\frac{n\xi}{\alpha}}\right)\left(e^{-\frac{n\,x}{\beta}}-e^{-\frac{n\,x}{\alpha}}\right)\sin\frac{n\,\pi\,\eta}{b}\sin\frac{n\,\pi\,y}{b}\,;\qquad(39)$$

die elastische Fläche des in $x = 0$ eingespannten Halbstreifens $x > 0$ ergibt sich hiernach zu

$$w = w_1 + w_2.\qquad(40)$$

Wir beschränken uns weiter auf die Betrachtung des Einspannmomentes längs $x = 0$, das ausschließlich durch die Teillösung (39) geliefert wird. Die erste der Formeln (7) ergibt für das fragliche Moment

$$(m_x)_{x=0} = -\frac{2\,P\,b\,\lambda^2}{\pi^2}\,\frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{1}{n}\left(e^{-\frac{n\xi}{\beta}}-e^{-\frac{n\xi}{\alpha}}\right)\sin\frac{n\,\pi\,\eta}{b}\sin\frac{n\,\pi\,y}{b}\,.\qquad(41)$$

Dieser Reihenausdruck ist wiederum gleichwertig dem geschlossenen Ausdruck

$$(m_x)_{x=0} = -\frac{P\,b\,\lambda^2}{2\,\pi^2}\,\frac{1}{\beta-\alpha}\,[L(\beta,\xi)-L(\alpha,\xi)]\,.\qquad(42)$$

Der Logarithmus $L(\alpha, \xi)$ ist dabei durch den Ausdruck (10) gegeben, nur mit ξ an Stelle von x und $L(\beta, \xi)$ ist die entsprechende Funktion von β und ξ. Um das Ergebnis (42) auch bei unendlich großer Streifenbreite zu verwenden, verlegen wir die x-Achse in die Streifenmitte (Abb. 5) und nehmen uns vor, das Moment m_x ebenfalls in Streifenmitte, d.h. in $x = y_1 = 0$, zu berechnen. Im Ausdruck (42) haben wir dann η durch $\frac{b}{2} + \eta_1$ und y durch $b/2$ zu ersetzen. Das Moment wird dann gleich

$$(m_x)_{x=y_1=0} = -\frac{P b \lambda^2}{2\pi^2} \frac{1}{\beta - \alpha} \ln \frac{\left(\mathfrak{Cof} \frac{\xi}{\beta} + \cos \frac{\pi \eta_1}{b}\right)\left(\mathfrak{Cof} \frac{\xi}{\alpha} - \cos \frac{\pi \eta_1}{b}\right)}{\left(\mathfrak{Cof} \frac{\xi}{\beta} - \cos \frac{\pi \eta_1}{b}\right)\left(\mathfrak{Cof} \frac{\xi}{\alpha} + \cos \frac{\pi \eta_1}{b}\right)}. \tag{43}$$

Bisher haben wir uns an die *Hubersche* Bezeichnungsweise gehalten. Die weitere Betrachtung wird bedeutend vereinfacht, wenn man, wie bereits eingangs erwähnt, $\mu = \mathfrak{Cof}\, 2\omega$ setzt und somit

$$\alpha = \frac{b\lambda}{\pi} e^{-\omega}, \qquad \beta = \frac{b\lambda}{\pi} e^{\omega} \tag{44}$$

erhält. Setzt man dies in die Gleichung (43) ein und geht dann zu $b \to \infty$ über, so gelangt man schließlich zum folgenden Ergebnis

$$(m_x)_{x=y_1=0} = -\frac{P\lambda}{4\pi\, \mathfrak{Sin}\, \omega} \ln \frac{(\xi e^{\omega})^2 + (\lambda \eta_1)^2}{(\xi e^{-\omega})^2 + (\lambda \eta_1)^2}. \tag{45}$$

So groß ist also das Biegemoment im Punkt $x = y = 0$ des eingespannten Randes einer orthotropen Platten-Halbene, falls man eine Punktlast P in $x = \xi$, $y_1 = \eta_1$ anbringt. Das Resultat (45) läßt sich auch in der dimensionslosen Form

$$(m_x)_{x=y_1=0} = -\frac{P\lambda}{4\pi\, \mathfrak{Sin}\, \omega} \ln \frac{e^{2\omega} + \lambda^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta}{e^{-2\omega} + \lambda^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta} \tag{46}$$

schreiben, sofern man $\eta_1/\xi = \operatorname{tg} \vartheta$ setzt (Abb. 6). Nimmt man insbesondere $\eta_1 = 0$, d. h. $\operatorname{tg} \vartheta = 0$ an, so wird einfach

$$(m_x)_{x=y_1=0} = -\frac{P\lambda\omega}{\pi\, \mathfrak{Sin}\, \omega}. \tag{47}$$

Das Einspannungsmoment einer parallel zur x-Achse verlaufenden Rippe ließe sich schließlich durch Integration des Ausdruckes (45) zwischen den Grenzen $\eta_1 = -v/2$ und $\eta_1 = v/2$ bestimmen.

Fall II, $\mu = 1$. Der unter „Fall I" beschriebene Vorgang läßt sich fast wörtlich wiederholen. Durch Überlagerung zweier Lösungen der Form (4 II) ergibt sich die elastische Fläche des freigestützten Halbstreifens in der Gestalt

$$w_1 = \frac{P b^2}{\pi^3 B_2 \lambda} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n^3} \left[\left(1 + \frac{n\pi\xi}{b\lambda}\right) \mathfrak{Sin}\, \frac{n\pi x}{b\lambda} - \frac{n\pi x}{b\lambda} \mathfrak{Cof}\, \frac{n\pi x}{b\lambda}\right] e^{-\frac{n\pi\xi}{b\lambda}} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}. \tag{48}$$
$$(-\xi \leqq x \leqq \xi)$$

Hieraus erhält man

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{P\xi\lambda}{\pi B_1} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n} e^{-\frac{n\pi x}{b\lambda}} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}. \tag{49}$$

Die Zusatzlösung von der Form

$$w_2 = x \sum_{n=1}^{\infty}{}' C_n e^{-\frac{n\pi x}{b\lambda}} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{50}$$

liefert

$$\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty}{}' C_n \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}. \tag{51}$$

Die Konstanten C_n bestimmen sich aus der Bedingung $\partial w_1/\partial x + \partial w_2/\partial x = 0$ bei $x = 0$. Die Substitution der Werte C_n in die Gleichung (50) führt auf die elastische Fläche

$$w_2 = -\frac{P\lambda x \xi}{\pi B_1} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{e^{-\frac{n\pi}{b\lambda}(\xi + x)}}{n} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}, \tag{52}$$

die sich auch in der geschlossenen Form

$$w_2 = -\frac{P\lambda x\xi}{4\pi B_1} \ln \frac{\mathfrak{Coj}\dfrac{\pi(x+\xi)}{b\lambda} - \cos\dfrac{\pi(y+\eta_1)}{b}}{\mathfrak{Coj}\dfrac{\pi(x+\xi)}{b\lambda} - \cos\dfrac{\pi(y-\eta_1)}{b}} \tag{53}$$

darstellen läßt.

Das Biegemoment längs des eingespannten Randes $x = 0$ ergibt sich nach den Gleichungen (7) zu

$$(m_x)_{x=0} = -B_1\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\right)_{x=0} = -\frac{P\xi}{2b}\left[\frac{\mathfrak{Sin}\dfrac{\pi\xi}{b\lambda}}{\mathfrak{Coj}\dfrac{\pi\zeta}{b\lambda} - \cos\dfrac{\pi(y-\eta_1)}{b}} - \frac{\mathfrak{Sin}\dfrac{\pi\xi}{b\lambda}}{\mathfrak{Coj}\dfrac{\pi\xi}{b\lambda} - \cos\dfrac{\pi(y+\eta_1)}{b}}\right]. \tag{54}$$

Mit Bezugnahme auf Abb. 5 erhält man insbesondere in der Randmitte

$$(m_x)_{x=y_1=0} = -\frac{2P\xi}{b} \frac{\mathfrak{Sin}\dfrac{\pi\xi}{b\lambda}\cos\dfrac{\pi\eta_1}{b}}{\mathfrak{Coj}\dfrac{2\pi\xi}{b\lambda} - \cos\dfrac{2\pi\eta_1}{b}}. \tag{55}$$

Mit $b \to \infty$ geht dieser Ausdruck über in

$$(m_x)_{x=y_1=0} = -\frac{P\lambda\xi^2}{\pi(\xi^2+\lambda^2\eta_1^2)} = -\frac{P\lambda}{\pi(1+\lambda^2\operatorname{tg}^2\vartheta)}, \tag{56}$$

sofern wieder $\eta_1/\xi = \operatorname{tg}\vartheta$ gesetzt wird.

Fall III, $\mu < 1$. Die weiter folgenden Ergebnisse erhält man entweder ausgehend von der Gleichung (4 III) oder auch direkt aus der Lösung im Fall I durch die bereits wiederholt benutzte Substitution (5).

Die elastische Fläche des freigestützten Halbstreifens hat im vorliegenden Fall die Gestalt

$$w_1 = \frac{Pb}{\pi^2\sqrt{B_1 B_2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} X_n \sin\frac{n\pi\eta}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{57}$$

worin

$$X_n = \left(\mathfrak{Sin}\frac{nx}{\alpha'}\cos\frac{nx}{\beta'}\cos\frac{n\xi}{\beta'} + \mathfrak{Coj}\frac{nx}{\alpha'}\sin\frac{nx}{\beta'}\sin\frac{n\xi}{\beta'}\right)\alpha' e^{-\frac{n\xi}{\alpha'}}$$
$$+\left(\mathfrak{Sin}\frac{nx}{\alpha'}\cos\frac{nx}{\beta'}\sin\frac{n\xi}{\beta'} - \mathfrak{Coj}\frac{nx}{\alpha'}\sin\frac{nx}{\beta'}\cos\frac{n\xi}{\beta'}\right)\beta' e^{-\frac{n\xi}{\beta'}}$$

sein soll. Die Zusatzlösung

$$w_2 = -\frac{Pb}{\pi^2\sqrt{B_1 B_2}} \frac{\beta'^2 - \alpha'^2}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n}{\alpha'}(x+\xi)}}{n^3} \sin\frac{n\xi}{\beta'}\sin\frac{nx}{\beta'}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\sin\frac{n\pi\eta}{b} \tag{58}$$

erfüllt die frühere Bedingung $\partial w_1/\partial x + \partial w_2/\partial x = 0$ auf $x = 0$. Das Einspannmoment auf dem Rande $x = 0$ ergibt sich am einfachsten durch Transformation des Ausdruckes (42) unter Zuhilfenahme der Relationen (5). Man erhält

$$m_x = -\frac{P\beta'}{2\beta}(\varphi_2' - \varphi_1'), \tag{59}$$

worin

$$\left.\begin{matrix}\varphi_1'\\ \varphi_2'\end{matrix}\right\} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\mathfrak{Sin}\dfrac{\xi}{\alpha'}\sin\dfrac{\xi}{\beta'}}{\mathfrak{Coj}\dfrac{\xi}{\alpha'}\cos\dfrac{\xi}{\beta'} - \cos\dfrac{\pi(y\pm\eta)}{b}} \tag{60}$$

bezeichnen soll.

Wir wollen jetzt vom Koordinatensystem nach Abb. 5 abermals Gebrauch machen und das Biegemoment in der Mitte des eingespannten Randes berechnen. Mit $y = b/2$ und $\eta = \frac{b}{2} + \eta_1$ ergibt sich dieses Moment wieder nach Gleichung (59), doch gilt diesmal

$$\left.\begin{matrix}\varphi_1'\\ \varphi_2'\end{matrix}\right\} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\mathfrak{Sin}\dfrac{\xi}{\alpha'}\sin\dfrac{\xi}{\beta'}}{\mathfrak{Coj}\dfrac{\xi}{\alpha'}\cos\dfrac{\xi}{\beta'} \pm \cos\dfrac{\pi\eta_1}{b\lambda}}. \tag{61}$$

Bevor man zu $b \to \infty$ übergeht, empfiehlt es sich $\mu = \cos 2\,\omega$ zu setzen. Man hat dann

$$\alpha' = \frac{b\,\lambda}{\pi \cos \omega}, \qquad \beta' = \frac{b\,\lambda}{\pi \sin \omega}. \tag{62}$$

Mit $b \to \infty$ verschwindet q_1', und mit dem entsprechenden Grenzwert von q_2' lautet das Endergebnis

$$(m_x)_{x=y_1=0} = -\frac{P\,\lambda}{2\,\pi \sin \omega} \operatorname{arc\,tg} \frac{\xi^2 \sin 2\,\omega}{\xi^2 \cos 2\,\omega + \lambda^2\,\eta_1^2} = -\frac{P\,\lambda}{2\,\pi \sin \omega} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin 2\,\omega}{\cos 2\,\omega + \lambda^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta}, \tag{63}$$

worin wiederum $\eta_1/\xi = \operatorname{tg} \vartheta$ sein soll. Der Ausdruck (56) ergibt sich hieraus als Sonderfall bei $\omega \to 0$.

7. Schlußbemerkungen. In den Abschnitten **3** bis **5** wurden in einer Reihe von Fällen geschlossene Ausdrücke für die Biegemomente des freigestützten Plattenstreifens und des Halbstreifens entwickelt, deren Berechnung mit Hilfe der üblichen einfachen Reihen sich als recht zeitraubend erweisen müßte. Die nur von den Plattensteifigkeiten, nicht aber von der Lastenstellung und der Lastkonzentration abhängigen Glieder ließen sich leicht in Form von Tabellen angeben, wodurch eine weitere Vereinfachung im praktischen Gebrauch der Momentenformeln zu erreichen wäre.

Geht man von dem Plattenstreifen zu Rechteckplatten mit Einzelkraft-Belastung über, so dürfte es klar sein, daß der singuläre Teil der Lösung durch die Abänderung der Randbedingungen unberührt bleiben müßte. Bildet man also die Differenz der Biegemomente oder der Plattenkrümmungen des Plattenstreifens und der Rechteckplatte, so würden die betreffenden *Fourier*reihen auch an der Angriffsstelle der Einzelkraft gut konvergieren. Mit Hilfe von Spiegelbildern ließe sich dabei der Spannungszustand der freigestützten Rechteckplatte aus demjenigen des Plattenstreifens besonders einfach entwickeln.

Die betreffenden Zusatzmomente sind in diesem Falle bekanntlich durch Theta-Funktionen darstellbar; praktisch genügt es bereits, den Einfluß von ganz wenigen positiven und negativen Einzelkräften, die auf den Plattenstreifen in passender Stellung aufzubringen sind, zu berücksichtigen.

Schließlich ist zu bemerken, daß Probleme der Biegung von Trägerrosten oder Rippenplatten, deren Systemachsen einen Winkel von 45° mit den Plattenrändern einschließen, sich gleichfalls auf die oben diskutierten Probleme zurückführen lassen.

(Eingegangen am 5. Juni 1956).

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *S. Woinowsky-Krieger*, Quebec 6 (Canada), 890 Ave Marguerite Bourgeoys.

Resonance-Behavior of Non-Linear One-Dimensional Gas Vibrations Analyzed by the *Ritz-Galerkin* Method

By Eyvind Frederiksen

1. Introduction. An attempt is hereby made to develop an approximate analysis of the following problem: The gas column within a cylindrical pipe, closed at one end, is excited to vibrations by a harmonically oscillating piston, located at the other end. What is the resonance response, when non-linear gas properties are taken into account?

Analytical solutions to the problem are hardly known, but excellent experiments have been made by *E. Lettau*[1] and others[2]. Their results indicate the existence of periodical solutions. For all investigated orders of resonance (fundamental resonance, first overtone etc.) the vibration response was found to include shock waves traveling back and forth through the pipe. The vibrations are thus of a highly non-linear character.

It will here be our aim to establish an approximate closed-form solution by means of a *Ritz-Galerkin* procedure, together with energy considerations. The general form of the approximate solution will be chosen with close agreement to the evidence of *Lettau*'s experiments, and our analysis will therefore be restricted to a quantitative evaluation of certain solution parameters.

It might be mentioned that conventional analysis of non-linear flow (based for instance on the method of characteristics) involving successive calculations on wave propagation, is hardly applicable here, since the gradual approach through such numerical calculations towards a steady-state solution is likely to possess poor convergency. In this respect *Lettau* made an interesting separate experiment, which shows that not less than some ten cycles (of the piston motion) are needed to bring the gas column from the state of rest up to the fully developed steady-state vibration. Another drawback of such calculations is, that they require in each case numerically specified boundary conditions, and therefore they lack much in generality.

In the following section we shall sketch the mathematical background of the problem to the extent necessary for the *Ritz-Galerkin* analysis, which is given in section **3**. The supplementary energy considerations are given in section **4**. The final evaluation of the solution parameters is found in section **5**. The results are compared with *Lettau*'s experiments and are discussed in general. Some of the analytical details have been omitted from the text, but may be found in the appendix.

2. Introductory analysis, Evidence of Lettaus's experiments. Let us first consider the equations of motion for one-dimensional unsteady flow. The dynamical equation reads

$$u_t + u\,u_x + \frac{1}{\varrho}\,p_x + r\,u = 0 \tag{1}$$

where $u(x, t)$ is particle velocity, $p(x, t)$ pressure and $\varrho(x, t)$ density of the gas. The length variable is x, the time variable is t. Subscripts denote partial differentiations. The linear term $r\,u$ in (1) is included to account for flow friction, which we shall assume acts only in the immediate vicinity of the pipe wall; r is a friction coefficient. The friction or damping will be considered relatively small, since this will appear as a necessary condition for some essential steps in our analysis, but it might also be emphasized, that this restriction overrules the necessity for consideration of the non-linearities, which the friction term actually may involve.

The continuity equation is

$$(\varrho\,u)_x + \varrho_t = 0\,. \tag{2}$$

We shall assume that changes in the state of gas are adiabatic, i. e.

$$\frac{dp}{d\varrho} = \frac{\varkappa\,p}{\varrho} = a^2\,. \tag{3}$$

Here $a = a\,(x, t)$ is defined as a (positive) gas quantity. $\varkappa$ is the ratio of the specific heats of the gas. In order to preserve the assumption (3) consistent with the friction term in (1), it is necessary to further assume that the developed friction heat radiates through the pipe wall to the surroundings,

---

[1] *E. Lettau*, Deutsche Kraftfahrtforschung 39 (1939).

[2] *E. Schmidt*, Z. VDI 79 (1935) S. 671 and VDI-Sonderheft „Dieselmaschine" VI (1937) S. 125; *C. Mayer-Schuchard*, Schwingungen von Luftsäulen mit großer Amplitude, Forschungsheft 376 (1936) S. 13—22.

so that no part of this heat remains to heat up the gas. This is a reasonable approximation when the thermal conductivity of the pipe wall is much larger than that of the gas.

Equations (1), (2) and (3) in u, p and ϱ are sufficient to fully describe the dynamical behavior of the gas column. However, much simplification is obtained, when (3) is introduced in (1) and (2) to give a set of only two equations, where now the dependent variables are u and a. We get respectively

$$E_1(u, a) \equiv u_t + u\, u_x + k\, a\, a_x + r\, u = 0\,, \tag{4}$$

$$E_2(u, a) \equiv a_t + u\, a_x + \frac{1}{k}\, a\, u_x = 0 \tag{5}$$

where

$$k = \frac{2}{\varkappa - 1}\ (\approx 5 \text{ for air})\,. \tag{6}$$

Our problem is then to solve equations (4) and (5) for $u(x, t)$ and $a(x, t)$, when the following end conditions are imposed

$$u(0, t) = 0\,, \tag{7a}$$

$$u(l, t) = U_l \sin \omega\, t\,, \tag{7b}$$

l being the pipe length, while ω is the angular frequency and U_l the velocity amplitude of the piston motion. Actually, in *Lettau*'s experiments the piston effects a displacement excitation rather than a velocity excitation, but the latter is much simpler to deal with in the present analysis, and the error involved is small, when the displacement amplitude U_l/ω of the piston motion is small compared with the pipe length.

To complete the boundary conditions we shall further make the reasonable assumption that the gas motion is periodic with period $T = 2\,\pi/\omega$ at any position x. Focusing our attention to the time interval $0 \leqq t \leqq T$, we get the additional conditions

$$u(x, 0) = u(x, T)\,, \tag{8a}$$

$$a(x, 0) = a(x, T)\,. \tag{8b}$$

Before we proceed with the non-linear problem, it is here worthwhile (for the sake of comparison) to briefly consider its linear counterpart. Linearizing equations (4) and (5) we get

$$u_t + k\, a_0\, a_x + r\, u = 0\,, \tag{9}$$

$$a_t + \frac{1}{k}\, a_0\, u_x = 0 \tag{10}$$

where a_0 is an average of a in both x and t. (The corresponding average u_0 of u must be zero, since the total mass of the gas colum remains constant).

In the case of fundamental resonance ($\omega\, l/a_0 = \pi$) we have for sufficient small damping ($r \ll \omega$) with good approximation the steady-state solution

$$u_{linear} = -\, U_l \left[\frac{1}{\beta\, l} \sin q\, x \cos \omega\, t + \left(\frac{x}{l}\right) \cos q\, x \sin \omega\, t\right], \tag{11}$$

$$a_{linear} = a_0 + \frac{U_l}{k} \left[\frac{1}{\beta\, l} \cos q\, x \sin \omega\, t + \left(\frac{x}{l}\right) \sin q\, x \cos \omega\, t\right] \tag{12}$$

where

$$q = \frac{\omega}{a_0} = \frac{\pi}{l}\,, \tag{13}$$

$$\beta = \frac{r}{2\, a_0} \ll q\,, \tag{14}$$

q being the so-called wave number and β a damping coefficient. Note that other vibration components with frequencies different from ω cannot exist in this case. If they were somehow introduced, they would die out because of the damping. Condition (14) implies that $\beta\, l \ll 1$, and it is thus seen that the terms in (11) and (12) having the factor (x/l) are quite insignificant, although, strictly speaking, they are needed in order to have the end condition (7b) satisfied.

With respect to the non-linear problem we shall, in this section, resort to a mere interpretation of *Lettau*'s experiments, and we shall limit ourselves to consider the case of fundamental resonance. Circumstances for higher order resonances are analogous, and they will be considered in the final analytical expressions only (in section 5).

The experiments are concerned with recordings of the velocity u and pressure p at a number of stations equally spaced along the pipe. We have here chosen to analyze variations in a rather than in p. The relation between these quantities follows from (3)

$$\frac{dp}{p} = \varkappa k \frac{da}{a} \left(\approx 7 \frac{da}{a} \text{ for air} \right). \tag{15}$$

The relative pressure variations are found to be relatively small ($\leqq 0.16$). We can, therefore, conclude from (15) that *Lettau*'s pressure diagrams may be interpreted without much error as recordings of variations in a, except for a constant factor.

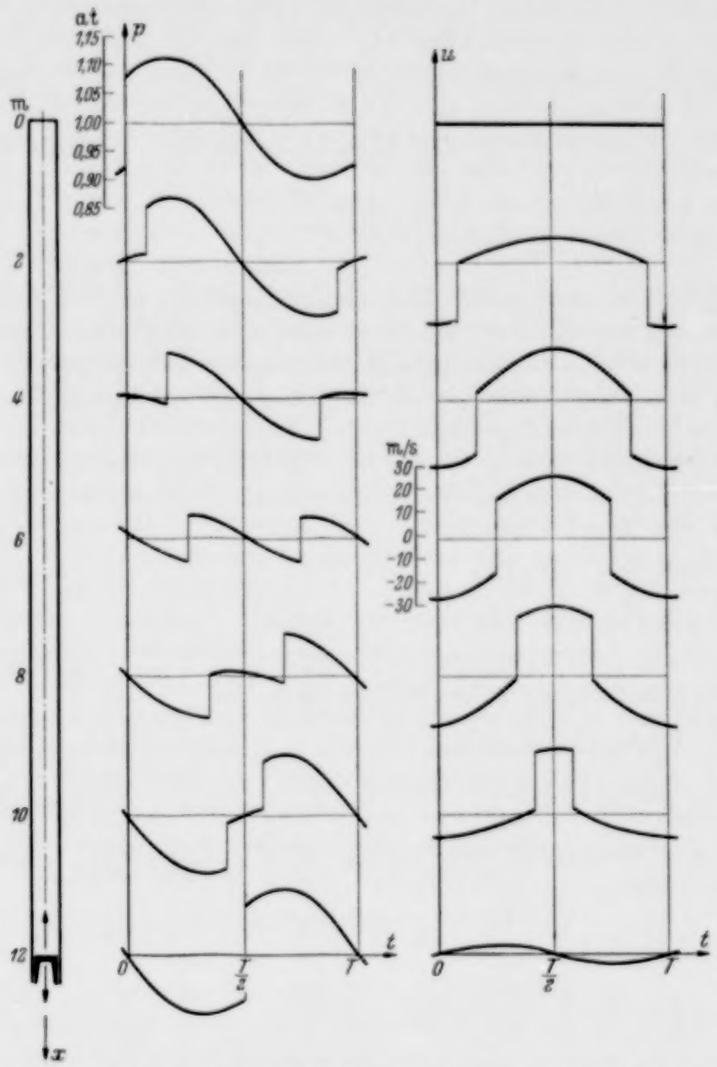


Fig. 1. Recordings of pressure p and velocity u from equally spaced stations along a cylindrical pipe with piston excitation at one pipe end. Reproduction from *E. Lettau*, see ref. (1) on page 100.

Fig. 1 shows a reproduction of the diagrams for fundamental resonance. From these we may summarize the experimental evidence as follows:

1) a is essentially an odd function of t for all x, and an even function of x for all t. — u is essentially an even function of t for all x (except for a slight disturbance at the piston end), and an odd function of x for all t.

2) a_0 (as a time average) is practically independent of x.

3) the recorded resonance response corresponds closely to a free and undamped linear vibration in a cylindrical pipe of the same length, being rigidly closed at both ends. (*Lettau* proved this through a graphical, linear analysis on back and forth running waves).

These observations enable us to express the response by an approximation of the general form

$$\tilde{u}(x, t) = -\left(\frac{x}{l}\right) U_l \cos q\, x \sin \omega\, t - k \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\, q\, x \cos n\, \omega\, t\,, \tag{16}$$

$$\tilde{a}(x, t) - a_0 = \frac{1}{k}\left(\frac{x}{l}\right) U_l \sin q\, x \cos \omega\, t + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\, q\, x \sin n\, \omega\, t \tag{17}$$

where $n = 1, 2, 3 \ldots$ (The "tilda" sign is here used to emphasize that we are dealing with an approximation). The insignificant terms with factor (x/l) are merely taken over from (11) and (12) just to have the end condition (7b) satisfied. The vibration is seen to contain infinitely many components each having a frequency which is an integral multiple of the fundamental frequency ω.

However, probably the most striking feature of fig. 1 remains to be pointed out:

4) The vibrations contain discontinuities in both a and u propagating back and forth through the pipe as a shock wave.

The shock wave pattern is apparently connected with the proper cooperation of the infinitely many vibration components and with the maximum amplitudes A_n of these components. From (17) is seen that the A_n's are merely the *Fourier* coefficients of the a-variation at $x = 0$. Inspection of fig. 1 shows that this periodical variation may be approximated by

$$\tilde{a}(0, t) - a_0 = -A^* \sin \alpha\, (\omega\, t - \pi) \qquad \text{for} \qquad 0 < t < T \tag{18}$$

where A^* is a maximum amplitude and α a "form factor", which appears to be smaller than unity.

Fourier analysis of (18) yields

$$A_n = A^* \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{2n}{(n^2 - \alpha^2)} \qquad \text{for} \qquad n = 1, 2, 3 \ldots \tag{19}$$

Incidentally, the discontinuities are associated with the circumstance that A_n approaches proportionality with $1/n$ for increasing values of n.

With the various statements above we are sufficiently prepared for the actual analysis.

3. Ritz-Galerkin analysis of the problem. So far, we have proposed to consider (16) and (17) as an approximate solution, and for the coefficients A_n we have proposed the relation (19), leaving the parameters A^* and α to be determined.

For the present analysis it is appropriate to start out from somewhat less specified relations. We shall write the approximate solution in the more general form

$$\tilde{u}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \varphi_n(x, t) , \tag{20}$$

$$\tilde{a}(x, t) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \psi_n(x, t) \tag{21}$$

where the "coordinate functions" φ_n and ψ_n are so chosen, that $\tilde{u}$ and $\tilde{a}$ are periodic (with time period T) and satisfy the end conditions (7). In order to establish conditions determining the unknown coefficients U_n and A_n, we shall require that the expressions $E_1(\tilde{u}, \tilde{a})$ and $E_2(\tilde{u}, \tilde{a})$ — as found by substitution of (20) and (21) into (4) and (5) and thereby considered as functions of x and t — are orthogonal to any of the functions φ_n and ψ_n. Taking the periodicity into account we thus introduce the conditions

$$\int_0^l \int_0^T E_i(\tilde{u}, \tilde{a}) \varphi_n(x, t) \, dt \, dx = 0 , \tag{22}$$

$$\int_0^l \int_0^T E_i(\tilde{u}, \tilde{a}) \psi_n(x, t) \, dt \, dx = 0 \tag{23}$$

where $i = 1, 2$ and $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$ These equations represent non-linear, algebraic relations between the set of coefficients U_n and A_n.

We shall not try to justify conditions (22) and (23) by a complete analysis originating in the calculus of variations. Reference is made to the ideas of *W. Ritz*[1] and *B. G. Galerkin*[2] and especially to the application of those ideas to non-linear vibration problems for systems of finite-degrees-of-freedom, as derived by *K. Klotter*[3]. For such systems corresponding conditions have been fully justified. Equations (22) and (23) are thought to represent merely a formal extension hereof to cover our particular continuous system problem, and it is in this sense that the present treatment has been designated a "*Ritz-Galerkin* analysis". The plausibility of the assumed conditions may be supported by the following remarks:

1) If (20) and (21) should accidentally represent an exact solution (u, a), then the validity of (22) and (23) is evident, since in that case E_1 and E_2 vanish identically in x and t.

2) On the other hand, if the two groups of functions φ_n and ψ_n each form a complete set of orthogonal functions, then conditions (22) and (23) express that $E_1(\tilde{u}, \tilde{a})$ and $E_2(\tilde{u}, \tilde{a})$ are orthogonal to any function in x and t. Hence $E_1(\tilde{u}, \tilde{a})$ and $E_2(\tilde{u}, \tilde{a})$ must vanish for all x and t, i. e. $(\tilde{u}, \tilde{a})$ becomes identical with the exact solution (u, a).

Thus if (22) and (23) cannot be strictly justified as a "direct method" for solving the underlying variational problem, they at least may be considered as expressions for "orthogonalizing"[4] the error, e. g. functions $E_1(\tilde{u}, \tilde{a})$ and $E_2(\tilde{u}, \tilde{a})$, with respect to the coordinate functions φ_n and ψ_n.

Now, in the present problem we have experimental evidence that the significant terms in an approximate solutions of form (20) and (21) contain the following coordinate functions [see (16) and (17)]

$$\varphi_n(x, t) = \sin n q x \cos n \omega t , \tag{24}$$

$$\psi_n(x, t) = \cos n q x \sin n \omega t \tag{25}$$

[1] *W. Ritz*, Crelles J. f. Reine und Angewandte Mathematik 135 (1908) S. 1.

[2] *B. G. Galerkin*, Vestnik Inghenerov 1 (1915) S. 879 (in Russian).

[3] *K. Klotter*, Non-linear vibration problems treated by the averaging method of *W. Ritz*, Proc. 1st Nat. Congr. Appl. Mech. (Chicago 1951) S. 125; *K. Klotter*, Trans. I. R. E. (1954) S. 13.

[4] For the "method of orthogonalization", see *L. Collatz*, Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, 2. Aufl., S. 30, Berlin 1955.

where $n = 1, 2, 3 \ldots$ These represent of course only a few of the functions needed to make up a complete set. But it is reasonable to assume that when we restrict ourselves to these functions, the effect is only to exclude those of the conditions (22) and (23) which are insignificant, and to slightly change the remaining conditions. The latter thus become an appropriate tool for approximate determination of the relevant coefficients U_n and A_n.

Through the choice of the coordinate functions in (24) and (25) we have disposed of the first terms in (16) and (17), containing the factor (x/l), which terms correspond to $U_0 \varphi_0$ and $A_0 \psi_0$ in (20) and (21). This neglect is not necessary, but it effects without much influence a substantial simplification of our analysis.

From expressions (20) through (25) we get the following four sets of orthogonality or *Galerkin* conditions (with $n = 1, 2, 3 \ldots$):

$$\int_0^l \int_0^T E_1(\tilde{u}, \tilde{a}) \sin n\, q\, x \cos n\, \omega\, t\, dt\, dx = 0\,, \tag{26}$$

$$\int_0^l \int_0^T E_2(\tilde{u}, \tilde{a}) \cos n\, q\, x \sin n\, \omega\, t\, dt\, dx = 0\,, \tag{27}$$

$$\int_0^l \int_0^T E_1(\tilde{u}, \tilde{a}) \cos n\, q\, x \sin n\, \omega\, t\, dt\, dx = 0\,, \tag{28}$$

$$\int_0^l \int_0^T E_2(\tilde{u}, \tilde{a}) \sin n\, q\, x \cos n\, \omega\, t\, dt\, dx = 0\,. \tag{29}$$

In order to simplify the following we shall anticipate that each of the conditions (28) and (29) will be satisfied for all values of n, when

$$U_n = -k\, A_n \tag{30}$$

which is in close agreement with (16) and (17). We can thus continue with the simpler approximation

$$\tilde{u}(x, t) = -k \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\, q\, x \cos n\, \omega\, t\,, \tag{31}$$

$$\tilde{a}(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\, q\, x \sin n\, \omega\, t\,. \tag{32}$$

These expressions imply that

$$\tilde{u}_t + k\, a_0\, \tilde{a}_x = 0\,, \tag{33}$$

$$\tilde{a}_t + \frac{1}{k}\, a_0\, \tilde{u}_x = 0\,, \tag{34}$$

and we get from (4) and (5)

$$E_1(\tilde{u}, \tilde{a}) = \tilde{u}\, \tilde{u}_x + k\, (\tilde{a} - a_0)\, \tilde{a}_x + r\, \tilde{u}\,, \tag{35}$$

$$E_2(\tilde{u}, \tilde{a}) = \tilde{u}\, \tilde{a}_x + \frac{1}{k}\, (\tilde{a} - a_0)\, \tilde{u}_x \tag{36}$$

which, with (31) and (32), become

$$\left.\begin{aligned} E_1(\tilde{u}, \tilde{a}) = {} & \frac{k\,(k+1)}{4}\, q \sum_{r,s} A_r\, s\, A_s \left[\sin (r+s)\, q\, x \cos (r+s)\, \omega\, t \right.\right. \\ & \left.\left. + \sin (r-s)\, q\, x \cos (r-s)\, \omega\, t\right] \right\} \\ & - \frac{k\,(k-1)}{4}\, b \sum_{r,s} A_r\, s\, A_s \left[\sin (r+s)\, q\, x \cos (r-s)\, \omega\, t \right. \\ & \left. + \sin (r-s)\, q\, x \cos (r+s)\, \omega\, t\right] \\ & - k\, r \sum_n A_n \sin n\, q\, x \cos n\, \omega t\,, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

$$\left.\begin{aligned} E_2(\tilde{u}, \tilde{a}) = &-\frac{k+1}{4} q \sum_{r,s} A_r s A_s [\cos(r+s) q x \sin(r+s) \omega t \\ &+ \cos(r-s) q x \sin(r-s) \omega t] \\ &+ \frac{k-1}{4} q \sum_{r,s} A_r s A_s [\cos(r+s) q x \sin(r-s) \omega t \\ &+ \cos(r-s) q x \sin(r+s) \omega t] \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

where the summations are to be performed for all positive integers r, s and n.

Substituting (37) and (38) into the remaining conditions (26) and (27) we get respectively

$$\sum_n = \frac{4}{k+1} \frac{r}{q} A_n , \tag{39}$$

$$\sum_n = 0 \tag{40}$$

where

$$\sum_n = \sum_{r+s=n} A_r s A_s + \sum_{r-s=n} A_r s A_s - \sum_{s-r=n} A_r s A_s . \tag{41}$$

The two sets of equations (39) and (40) are obviously somewhat contradictory[1], unless the friction coefficient r vanishes. However, remembering that these equations are themselves the result of approximations, and considering only the case of small damping, it should not be too erroneous to continue with only one set of equations

$$\sum_n = \frac{2}{k+1} \frac{r}{q} A_n \tag{42}$$

representing the "average" of (39) and (40).

Elaborating the summations in (41) we get

$$\left.\begin{aligned} \sum_n = &[A_1 A_{n-1} + 2 A_2 A_{n-2} + 3 A_3 A_{n-3} + \cdots + (n-1) A_{n-1} A_1] \\ &+ [A_1 A_{n+1} + 2 A_2 A_{n+2} + 3 A_3 A_{n+3} + \cdots] \\ &- [(n+1) A_1 A_{n+1} + (n+2) A_2 A_{n+2} + (n+3) A_3 A_{n+3} + \cdots] . \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Contracting the series expansions, substituting into (42) and remembering that $r = 2 a_0 \beta$ and $q = \pi/l$ we get

$$\frac{4}{\pi} \frac{\beta l}{(k+1)} a_0 A_n = \sum_n = \frac{n}{2} \sum_{p=1}^{n-1} A_p A_{n-p} - n \sum_{p=1}^{\infty} A_p A_{n+p} \tag{44}$$

where p attains only positive integral values.

To solve this infinite set of equations in the coefficients A_n appears to be a difficult task. At this point, therefore, it is suitable to introduce the experimental evidence we have available on these coefficients. Substituting (19) in (44) we get, after some intermediate steps (which are given in the appendix),

$$\frac{2}{k+1} a_0 \beta l = \frac{(n^2 - \varkappa^2)}{(n^2 - 4\varkappa^2)} f(\varkappa) A^* \sin \varkappa \pi \tag{45}$$

where

$$f(\varkappa) = -1 + 2\varkappa^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 - \varkappa^2} \tag{46}$$

[1] This contradiction apparently results from the fact that in (26) through (29) we have twice as many equations as unknown coefficients U_n and A_n. We could have avoided this redundancy, if instead of (20) and (21) had chosen the approximation

$$\tilde{u}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \varphi_n + \sum_{n=0}^{\infty} V_n \varphi_n ,$$

$$\tilde{a}(x,t) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_n + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \varphi_n$$

where a new set of coefficients V_n and B_n, but no new coordinate functions, are included. However, according to the experimental evidence, these new coefficients must be insignificant, and their corresponding solution terms may therefore be ignored without considerable error.

The function $f(\varkappa)$ has been calculated from a series expansion (as derived in the appendix) and is plotted in fig. 2.

In order to have a unique relation between the parameters A^* and $\varkappa$ (i. e. independent of integers n) we shall approximate the set of equations (45) by their "average", which will be

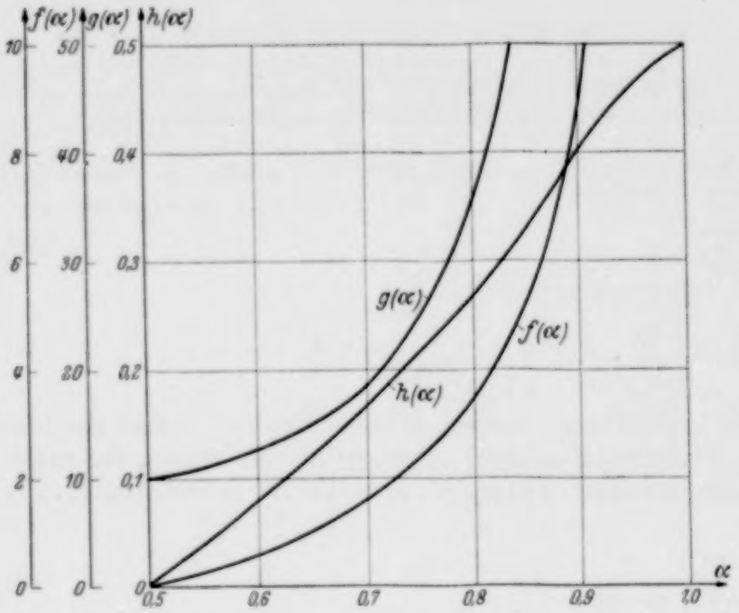


Fig. 2. Functions $f(\varkappa)$, $g(\varkappa)$ and $h(\varkappa)$ as determined by expressions (46), (56) and (57).

$$\frac{2}{k+1} a_0 \beta l = f(\varkappa) A^* \sin \varkappa \pi , \qquad (47)$$

considering that

$$\lim_{p \to \infty} \left[\frac{1}{p} \sum_{n=1}^{p} \frac{(n^2 - \varkappa^2)}{(n^2 - 4\varkappa^2)} \right] = 1 . \qquad (48)$$

Equation (47) represents only one relation between the solution parameters, so we have not obtained full information from our analysis. This is not the fault of the *Ritz-Galerkin* method as such, but is merely due to the fact that we have approximated the whole set of equations (26) through (29) by a single expression (47).

4. Energy considerations. Another relation between A^* and $\varkappa$ may be found by equating the vibration work exerted by the piston on the gas column to the energy dissipated through friction.

The mechanical work W_P transferred from the piston to the gas during one time period T is

$$W_P = -\int_0^T p(l, t)\, U_l \sin \omega t \, dt . \qquad (49)$$

As we consider pressure changes essentially proportional to changes in a, i. e. from (15) and (3)

$$\frac{p(l, t) - p_0}{\tilde{a}(l, t) - a_0} \approx \varkappa k \frac{p_0}{a_0} = k \varrho_0 a_0 , \qquad (50)$$

we may rewrite (49) as

$$W_P = -k \varrho_0 a_0 U_l \int_0^T [\tilde{a}(l, t) - a_0] \sin \omega t \, dt . \qquad (51)$$

Substituting $\tilde{a}(l, t)$ from (32) we find

$$W_P = \frac{k}{2} \varrho_0 a_0 T U_l A_1 \qquad (52)$$

where A_1 is the amplitude of the fundamental component of $(\tilde{a} - a_0)$.

The dissipation work W_D per time period may be written as

$$W_D = r \int_0^l \int_0^T \varrho u^2 \, dt \, dx . \qquad (53)$$

Introducing herein (31) and (14) and neglecting density changes we get

$$W_D = \frac{k^2}{2} \varrho_0 a_0 T \beta l \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 . \qquad (54)$$

Equating W_P and W_D and introducing (19) we obtain

$$\frac{2\pi}{k} \frac{U_l}{\beta l} = (1 - \varkappa^2)\, g(\varkappa)\, A^* \sin \varkappa \pi \qquad (55)$$

where

$$g(\varkappa) = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{2p}{p^2 - \varkappa^2} \right)^2 . \qquad (56)$$

The function $g(\varkappa)$ has been calculated from a series expansion (as derived in the appendix) and is plotted in fig. 2. Expression (55) is the desired second relation between A^* and $\varkappa$.

5. Discussion ot the solution parameters A^* and $\varkappa$. From (47) and (55) we get the following two dimensionless relations[1]:

$$\frac{1}{\pi}\frac{k}{k+1}\frac{a_0}{U_l}(\beta l)^2 = \frac{f(\varkappa)}{(1-\varkappa^2)\,g(\varkappa)} = h(\varkappa)\,, \tag{57}$$

$$\frac{4\pi}{k(k+1)}\frac{U_l}{a_0} = (1-\varkappa^2)\,f(\varkappa)\,g(\varkappa)\left(\frac{A^*}{a_0}\right)^2 \sin^2 \varkappa\pi\,, \tag{58}$$

from which it is seen that the form factor $\varkappa$ and the maximum amplitude A^*/a_0 of $\tilde{a}/a_0$ are both functions of the relative excitation amplitude U_l/a_0 and the damping measure βl, i. e.

$$\varkappa = F\left(\frac{U_l}{a_0}, \beta l\right), \tag{59}$$

$$\frac{A^*}{a_0} = G\left(\frac{U_l}{a_0}, \beta l\right). \tag{60}$$

So far, we have considered the case of fundamental resonance only. Applying the same analysis to higher order resonances of order s (with $s = 1$ for fundamental resonance, $s = 2$ for first overtone etc.) we find

$$\varkappa = F\left(\frac{U_l}{s\,a_0}, \frac{\beta l}{s}\right), \tag{61}$$

$$\frac{A^*}{a_0} = G\left(\frac{U_l}{s\,a_0}, \frac{\beta l}{s}\right) \tag{62}$$

where the functions F and G are the same as in (59) and (60). The arguments U_l/a_0 and βl have merely been replaced by $U_l/s\,a_0$ and $\beta l/s$.

From relations (57) through (62) a diagram has been calculated (as presented in fig. 3), showing A^*/a_0 as function of $U_l/s\,a_0$ for $\varkappa$ and βl as parameters.

Let us here first compare this diagram with *Lettau*'s four experiments for resonance of orders $s = 1, 2, 3$ and 4.

In the first three columns of Table 1 are given the experimental data on the resonance frequency $f = \omega/2\pi$ cycles per second, the maximum pressure amplitude P^* atm. (corresponding to A^*) and the form factor $\varkappa$. The frequencies are seen to be proportional to the resonance order s. They thus determine uniquely the (actual) sound velocity $a_0 = 2\,l\,f/s = 344$ m/s, considering that the pipe length is $l = 12{,}00$ m. P^* and $\varkappa$ have found been from the pressure recordings obtained at the closed pipe end. Their values in Table 1 appear to be about 2 to 5 percent uncertain. The next two columns give values for

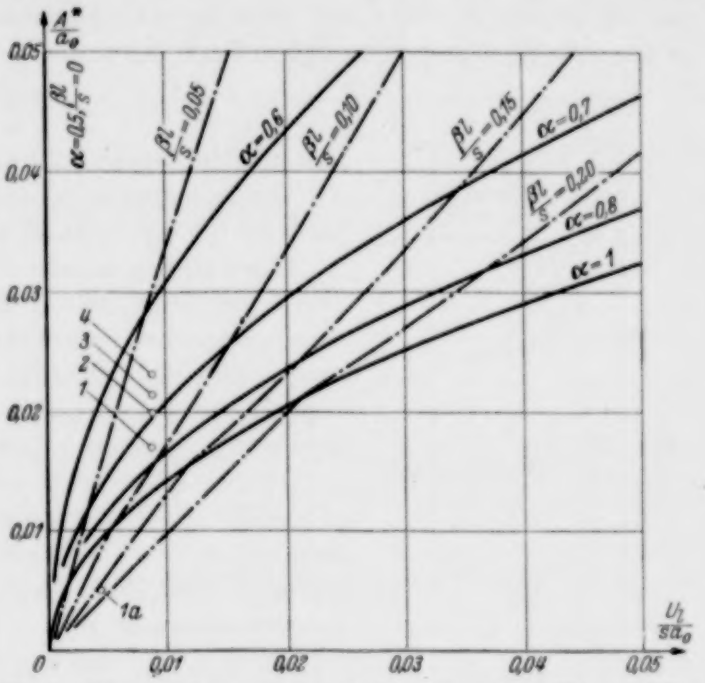


Fig. 3. Response plane, as determined by expressions (57) and (58), showing vibration amplitude A^*/a_0 versus excitation amplitude $U_l/s\,a_0$ with damping $\beta l/s$ and form factor $\varkappa$ as parameters. The points marked 1, 2, 3 and 4 correspond to *Lettau*'s experiments. They are all located in the shock region above the parabola $\varkappa = 1$. Point 1a below the parabola $\varkappa = 1$ corresponds approximately to the shock-free condition which — according to the present analysis — should exist for fundamental resonance, if in *Lettau*'s experimental set-up the pipe had been twice as long, i. e. 24 m.

$$\frac{U_l}{s\,a_0} = \frac{R\,2\pi f}{s\,a_0}$$

where $R = 0.034$ m is the displacement amplitude in the piston motion, and

$$\frac{A^*}{a_0} = \frac{1}{\varkappa k}\frac{P^*}{p_0} \approx \frac{P^*}{7}\,.$$

With these values are four "response points" plotted in fig. 3, each marked with their corresponding resonance order s. From this diagram are then estimated the corresponding values of $\varkappa$ and βl as given in columns 6 and 7.

The $\varkappa$-values obtained in this manner are seen to be in excellent agreement with the measured values.

[1] See fig. 2 for a plot of the function $h(\varkappa)$.

Table 1.

s	Measured quantities			Calculated quantities				
	f c. p.s	P^* atm.	α	$\frac{U_l}{s\,a_0}$	$\frac{A^*}{a_0}$	α	βl	$\beta_0 l$
1	14,35	0,12	0,75	0,0089	0,0170	0,75	0,086	0,040
2	28,7	0,14	0,71	0,0089	0,0200	0,70	0,153	0,059
3	43,1	0,15	0,68	0,0089	0,0170	0,67	0,213	0,073
4	57,5	0,16	0,65	0,0089	0,0230	0,64	0,254	0,084

The corresponding $\beta\,l$-values are in reasonable agreement with earlier experiments made by *K. O. Lehmann*[1] and *E. Frederiksen*[2]. Both have found that the damping coefficient β, in case of (nearly) harmonic vibrations of air columns in cylindrical pipes, is 2 to 3 times as large as calculated from *Kirchhoff*'s[3] formula

$$\beta_0 = 2{,}17\,\frac{\sqrt{\omega\,\nu}}{a_0\,d} \tag{63}$$

considering maximal amplitudes of the same magnitude as in *Lettau*'s experiments. When in (63) we substitute $\nu = 15 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}$ for the kinematic viscosity, $d = 0{,}070$ m for the inner diameter of the test pipe and $a_0 = 344$ m/s for the sound velocity, we find with the pipe length $l = 12$ m

$$\beta_0\,l = 0{,}0042\,\sqrt{\omega}\ .$$

Substituting herein the values of $\omega = 2\,\pi f$ we get $\beta_0\,l$ as given in Table 1.

The agreement convinces us of the dependability of our analysis and justifies further investigations into the general character of the problem.

The validity of our analysis is restricted to the interval $0{,}5 \leqq \alpha \leqq 1$. The lower limit follows from (57) which shows that $h(\alpha)$ and $f(\alpha)$ cannot attain negative values, and according to fig. 2 this requires $\alpha \geqq 0{,}5$. The upper limit follows from the fact that $\alpha > 1$ would be associated with negative pressure jumps which are impossible for entropy reasons. Fig. 4 shows the general character of $\tilde{a}(0, t) - a_0$ for selected values of α.

Obviously $\alpha = 0{,}5$ corresponds to the case of undamped vibrations ($\beta\,l = 0$). Here, according to (58), A^* becomes unlimited unless U_l vanishes. If $U_l = 0$, we have undamped free vibrations in a cylindrical pipe closed at both ends. In that case we need proper initial conditions for the determination of A^*.

When $\alpha = 1$ our approximation (31) and (32) with the restraint (18) or (19) becomes identical with a linear response, e. g. a pure harmonic vibration (without discontinuities). To check this we find — through a limiting process with the aid of the series expansions for $f(\alpha)$ and $g(\alpha)$ as given in the appendix, and again considering higher resonance orders by replacing U_l/a_0 by $U_l/s\,a_0$, resp. βl by $\beta l/s$ — that $\alpha = 1$ specifies (57) resp. (58) to

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{k}{(k+1)}\,\frac{s\,a_0}{U_l}\left(\frac{\beta\,l}{s}\right)^2 = 0{,}5\,, \tag{64}$$

$$\frac{2}{k\,(k+1)}\,\frac{U_l}{s\,a_0} = \pi\left(\frac{A^*}{a_0}\right)^2, \tag{65}$$

and combining these relations we get

$$\left(\frac{A^*}{a_0}\right)_{\alpha=1} = \frac{1}{k}\,\frac{s}{\beta\,l}\,\frac{U_l}{s a_0} = \frac{1}{k\,\beta\,l}\,\frac{U_l}{a_0} \tag{66}$$

which is in agreement with the amplitude of the significant term in expression (12) for $a(x, t)$ in the linearized case.

In the "response plane" fig. 3 the "response points" $(U_l/s\,a_0,\ A^*/a_0)$ are located on parabolas, when α is assigned to constant values (see (58)). The interval $0{,}5 \leqq \alpha \leqq 1$ is then characterized by

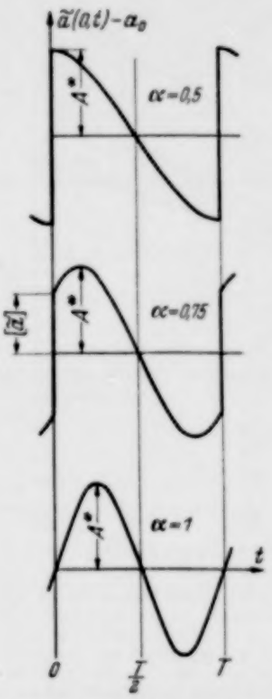


Fig. 4. Vibration response $(\tilde{a}(0, t) - a_0)$ at the closed pipe end, according to the assumption (18). The diagrams show the effect of the form factor. The top diagram ($\alpha = 0{,}5$) corresponds to the case of undamped (free) vibration. The next diagram ($\alpha = 0{,}75$) shows a case, where the damping is not sufficient for eliminating the presence of shocks, such as in the bottom diagram ($\alpha = 1$), where the response is essentially linear.

[1] *K. O. Lehmann*, Ann. Physik 21 (1934) S. 533.

[2] *E. Frederiksen*, Luftpulsationer i Rorsystemer (Pulsating air flow in pipe systems), Diss. Techn. Univ. Copenhagen 1954. Chapter 4 (in Danish).

[3] *G. Kirchhoff*, Pogg. Ann. 134 (1868) S. 177.

the "response region" bounded by the ordinate axis and the parabola $\alpha = 1$, and our analysis is valid for this region only. To account for response points below the parabola $\alpha = 1$ (and above the abscissa axis) it is — with reference to (66) — reasonable to adopt the linear solution (11) and (12). Therefore — considering only the significant terms without the factor (x/l) — fig. 3 is, in this region, provided with straight lines radiating from the origin, corresponding to constant values of the parameter $\beta l/s$. Incidentally, this simplifie dlinear response could still be considered a solution of form (31) and (32) with restraint (18) or (19) in so far as this case corresponds to vanishing coefficients A_n for $n \geqq 2$, while $A_1 = A^*$ and $\alpha = 1$.

Within this interpretation of our analysis we can make the following remarkable statement:

Response points above the parabola $\alpha = 1$ correspond to essentially non-linear vibrations including the presence of shocks.

Response points below the parabola $\alpha = 1$ correspond to essentially linear vibrations where shocks are impossible.

With the aid of (64) and (65) we can elaborate this statement as follows: In a pipe with given "damping measure" βl, shocks will be present only when

$$\frac{U_l}{s\,a_0} > \frac{1}{\pi}\,\frac{2\,k}{k+1}\left(\frac{\beta\,l}{s}\right)^2 \tag{67}$$

and consequently

$$\frac{A^*}{a_0} > \frac{1}{\pi}\,\frac{2}{k+1}\,\frac{\beta\,l}{s}. \tag{68}$$

Obviously, when the excitation amplitude U_l/a_0 is given, shocks can be present only when $\beta\,l$ is less than a critical value specified by (67).

Unfortunately, none of *Lettau*'s closed-pipe experiments exhibit absence of shocks. According to our analysis a shock-free response could have been obtained if the pipe had been, for instance, twice as long, whereby $\beta\,l$ would have been approximately doubled, considering the case of fundamental resonance. This would correspond approximately to the response point 1a in fig. 3. However, *Lettau* has made another series of experiments, where the pipe at $x = 0$ is changed into an open end. Although the resonance responses in these experiments are far more complicated (presumably because of imperfect wave reflections at the open pipe end), they do disclose the general tendency that the pipe damping counteracts the shock formation. Thus no shocks appeared in the case of fundamental resonance, but were present at higher order resonances having magnitudes increasing with the resonance order.

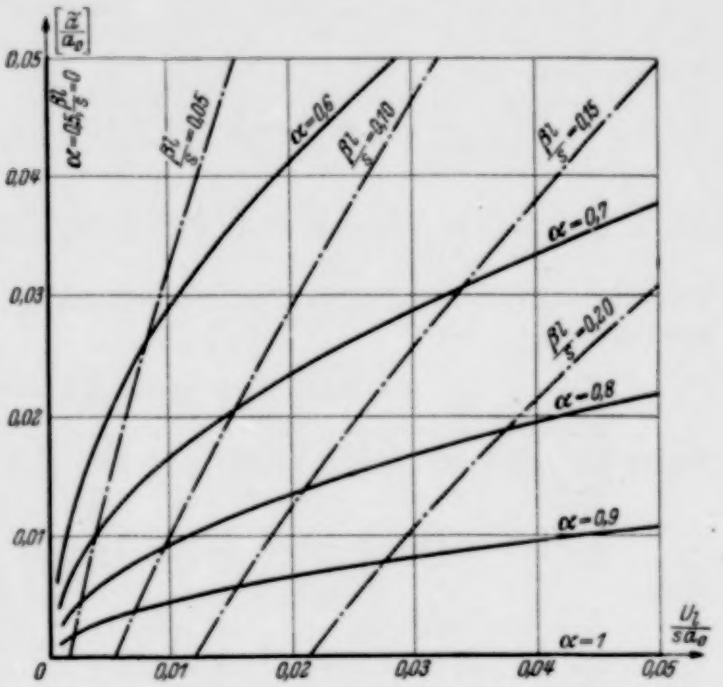


Fig. 5. Response plane for the shock strength $[\tilde{a}/a_0]$ as determined from (69), (57) and (58).

As fig. 1 indicates, two pressure jumps occur within the time period at any position x, and it is easy to show that the magnitude or strength of these jumps is maintained constant throughout the pipe. At the pipe ends, only one shock of double strength appears within the period. In terms of the quantity a we find from (18) the shock strength

$$[\tilde{a}] = A^* \sin \alpha\,\pi \tag{69}$$

Fig. 5 shows a diagram (analogous to fig. 3) for the evaluation of $[\tilde{a}]$.

6. Summary. The present paper concerns an approximate analysis of damped resonance vibrations in a closed cylindrical pipe with harmonic excitation at one pipe end. Earlier experiments made by *Lettau* have disclosed that such vibrations may be highly non-linear and may even include shock waves travelling back and forth. The analysis is based essentially on the socalled *Ritz-Galerkin* method. Emphasis is put on the mechanism of the analysis rather than on a strict mathematical justification hereof. The theoretical results are in close agreement with the experimental evidence. Further a criterion for the presence and absence of shocks is derived.

The present investigation was undertaken while the author, on leave from the Technical University of Denmark, was working as a Research Associate ar Stanford University in California

on a Research Fellowship from International Cooperation Administration, Washington D. C. Thanks are due to all these institutions.

In particular the author wishes to express his sincere thanks to Professor *K. Klotter*, Division of Engineering Mechanics, Stanford University, for his kind encouragement of the work and valuable criticism.

Appendix 1. Evaluation of $\sum_n$.

From (44) we have

$$\sum_n = \frac{n}{2}\sum_{p=1}^{n-1} A_p\, A_{n-p} - n\sum_{p=1}^{\infty} A_p\, A_{n+p} \tag{70}$$

where the coefficients A_n from (19) are to be substituted. With

$$K = A^* \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \tag{71}$$

we can write

$$A_p\, A_{n-p} = K^2\left(\frac{1}{p+\alpha} + \frac{1}{p-\alpha}\right)\left(\frac{1}{n-p+\alpha} + \frac{1}{n-p-\alpha}\right), \tag{72}$$

$$A_p\, A_{n+p} = K^2\left(\frac{1}{p+\alpha} + \frac{1}{p-\alpha}\right)\left(\frac{1}{n+p+\alpha} + \frac{1}{n+p-\alpha}\right). \tag{73}$$

Substituting (72) and (73) in (70) and performing the summations we shall need the following sub-summations

$$\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{(p+\alpha)(n-p+\alpha)} = \frac{1}{(n+2\alpha)}\sum_{p=1}^{n-1}\left(\frac{1}{p+\alpha} + \frac{1}{n-p+\alpha}\right) = \frac{2}{(n+2\alpha)}\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p+\alpha}, \tag{74}$$

$$\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{(p-\alpha)(n-p-\alpha)} = \frac{1}{(n-2\alpha)}\sum_{p=1}^{n-1}\left(\frac{1}{p-\alpha} + \frac{1}{n-p-\alpha}\right) = \frac{2}{(n-2\alpha)}\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p-\alpha}, \tag{75}$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{(p+\alpha)(n-p-\alpha)} &= \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n-1}\left(\frac{1}{p+\alpha} + \frac{1}{n-p-\alpha}\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n-1}\left(\frac{1}{p+\alpha} + \frac{1}{n-p+\alpha} - \frac{1}{n-p+\alpha} + \frac{1}{n-p-\alpha}\right)\\ &= \frac{2}{n}\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p+\alpha} + \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n-1}\left(\frac{1}{n-p-\alpha} - \frac{1}{n-p+\alpha}\right),\end{aligned}\right\} \tag{76}$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{(p-\alpha)(n-p+\alpha)} &= \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n-1}\left(\frac{1}{p-\alpha} + \frac{1}{n-p+\alpha}\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n-1}\left(\frac{1}{p-\alpha} + \frac{1}{n-p-\alpha} - \frac{1}{n-p-\alpha} + \frac{1}{n-p+\alpha}\right)\\ &= \frac{2}{n}\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p-\alpha} - \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n-1}\left(\frac{1}{n-p-\alpha} - \frac{1}{n+p-\alpha}\right),\end{aligned}\right\} \tag{77}$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(p+\alpha)(n+p+\alpha)} = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p+\alpha} - \frac{1}{n+p+\alpha}\right) = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{(p+\alpha)}, \tag{78}$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(p-\alpha)(n+p-\alpha)} = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p-\alpha} - \frac{1}{n+p-\alpha}\right) = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p-\alpha}, \tag{79}$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(p+\alpha)(n+p-\alpha)} &= \frac{1}{(n-2\alpha)}\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p+\alpha}-\frac{1}{n+p-\alpha}\right)\\ &= \frac{1}{(n-2\alpha)}\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p+\alpha}-\frac{1}{n+p+\alpha}+\frac{1}{n+p+\alpha}-\frac{1}{n+p-\alpha}\right)\\ &= \frac{1}{(n-2\alpha)}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p+\alpha}-\frac{1}{(n-2\alpha)}\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+p-\alpha}-\frac{1}{n+p+\alpha}\right),\end{aligned}\right\} \tag{80}$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(p-\alpha)(n+p+\alpha)} &= \frac{1}{(n+2\alpha)}\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p-\alpha}-\frac{1}{n+p+\alpha}\right)\\ &= \frac{1}{(n+2\alpha)}\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p-\alpha}-\frac{1}{n+p-\alpha}+\frac{1}{n+p-\alpha}-\frac{1}{n+p+\alpha}\right)\\ &= \frac{1}{(n+2\alpha)}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p-\alpha}+\frac{1}{(n+2\alpha)}\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+p-\alpha}-\frac{1}{n+p+\alpha}\right).\end{aligned}\right\} \tag{81}$$

With these sub-summations, straightforward computations lead to

$$\sum_{n} = K^2\frac{4n}{(n^2-4\alpha^2)}\left(-1+2\alpha^2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2-\alpha^2}\right), \tag{82}$$

and substitution of (82), (71) and (19) into (44) yields immediately (45) and (46).

Appendix 2. Series expansions of functions $f(\alpha)$ and $g(\alpha)$. Making first the following transformations of (46) and (56):

$$f(\alpha) = -1+2\alpha^2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2-\alpha^2} = -1+2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{\alpha}{p}\right)^2}{1-\left(\frac{\alpha}{p}\right)^2} = -1+2\sum_{p=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{p}\right)^{2n}\right], \tag{83}$$

$$\left.\begin{aligned}g(\alpha) &= \sum_{p=1}^{\infty}\left[\frac{2p}{p^2-\alpha^2}\right]^2 = 4\sum_{p=1}^{\infty}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{\alpha}{p}\right)^2}\right]^2 = \frac{4}{\alpha^2}\sum_{p=1}^{\infty}\left[\left(\frac{\alpha}{p}\right)+\left(\frac{\alpha}{p}\right)^3+\left(\frac{\alpha}{p}\right)^5+\left(\frac{\alpha}{p}\right)^7+\cdots\right]^2\\ &= \frac{4}{\alpha^2}\sum_{p=1}^{\infty}\left[\left(\frac{\alpha}{p}\right)^2+2\left(\frac{\alpha}{p}\right)^4+3\left(\frac{\alpha}{p}\right)^6+4\left(\frac{\alpha}{p}\right)^8+\cdots\right] = \frac{4}{\alpha^2}\sum_{p=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{\alpha}{p}\right)^{2n}\right],\end{aligned}\right\} \tag{84}$$

then introducing the Bernoulli numbers B_n defined by

$$B_n = 2\frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p}\right)^{2n} \tag{85}$$

we get

$$f(\alpha) \approx -1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!}B_n\alpha^{2n}, \tag{86}$$

$$g(\alpha) \approx 2\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!}B_n\alpha^{2n-2}. \tag{87}$$

These series converge rather slowly, but noting that

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!}B_n\right) = 2 \tag{88}$$

we can considerably increase the rate of convergency as follows. Adding and substracting in (86) the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\,\alpha^{2n} = \frac{2\,\alpha^2}{1-\alpha^2} \tag{89}$$

and in (87) the series

$$2\sum_{n=1}^{\infty} 2\,n\,\alpha^{2n-2} = \frac{4}{(1-\alpha^2)^2} \tag{90}$$

we get

$$f(\alpha) = -1 + \frac{2\,\alpha^2}{1-\alpha^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2\,\pi)^{2n}}{(2\,n)!}\,B_n - 2\right]\alpha^{2n}, \tag{91}$$

$$g(\alpha) = \frac{4}{(1-\alpha^2)^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} n\left[\frac{(2\,\pi)^{2n}}{(2\,n)!}\,B_n - 2\right]\alpha^{2n-2}. \tag{92}$$

Substituting herein *Bernoulli* numbers

$$B_1 = \frac{1}{6}, \qquad B_2 = \frac{1}{30}, \qquad B_3 = \frac{1}{42}, \qquad B_4 = \frac{1}{30}, \qquad B_5 = \frac{5}{66}, \qquad B_6 = \frac{691}{2730}$$

we find for the first important terms of (91) and (92)

$$\left.\begin{aligned} f(\alpha) = -1 + \frac{2\,\alpha^2}{1-\alpha^2} + 1{,}28987\,\alpha^2 + 0{,}16465\,\alpha^4 + 0{,}03469\,\alpha^6 \\ + 0{,}00815\,\alpha^8 + 0{,}00199\,\alpha^{10} + \cdots, \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

$$\left.\begin{aligned} g(\alpha) = \frac{4}{(1-\alpha^2)^2} + 2{,}57974 + 0{,}65860\,\alpha^2 + 0{,}20814\,\alpha^4 + 0{,}06520\,\alpha^6 \\ + 0{,}01990\,\alpha^8 + 0{,}00600\,\alpha^{10} + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

Equations (93) and (94) specify $f(\alpha)$ and $g(\alpha)$ in the interval $0 \leqq \alpha \leqq 0{,}5$ to the accuracy of 6 ciphers. To obtain the same accuracy in the interval $0{,}5 \leqq \alpha \leqq 1$ would require more terms than considered above, especially in the neighborhood of $\alpha = 1$. However, from (46) and (56) one can derive the formulas

$$f(1-\alpha) = -\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\,f(\alpha), \tag{95}$$

$$g(1-\alpha) = g(\alpha) + \frac{f(1-\alpha)}{\alpha\,(1-\alpha)^2}. \tag{96}$$

Thus the values of $f(\alpha)$ and $g(\alpha)$ in the interval $0{,}5 \leqq \alpha < 1$ may readily be calculated from known function values for the interval $0 \leqq \alpha \leqq 0{,}5$.

Fig. 2 shows a plot of the calculated functions $f(\alpha)$ and $g(\alpha)$ together with a plot of $h(\alpha)$ defined by (57).

(Eingegangen am 20. Juni 1956.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Eyvind Frederiksen*, Gentofte (Dänemark) Lyngbyvej 315 A.

Knickung von Schraubenfedern unter Druck und konservativer Torsion

Von H. Maag

1. Einleitung. Die Knicklasten einer durch eine axiale Druckkraft beanspruchten Schraubenfeder wurden erstmals von *E. Hurlbrink*[1] und in einem allgemeineren Rahmen 1924 von *R. Grammel*[2] berechnet, indem die Feder in geeigneter Weise durch einen weichen Stab ersetzt wurde. *C. B. Biezeno* und *J. J. Koch*[3] zeigten, daß die Resultate durch Berücksichtigung des Einflusses der Querkraft speziell für nichtschlanke Federn erheblich verbessert werden können, und *J. A. Haringx*[4,5] machte neuerdings darauf aufmerksam, daß man dann auch die von der Querkraft erzeugte Schiebung berücksichtigen muß. In dieser Arbeit berechnete *Haringx* die kritischen Lasten für eine Belastung, die sich aus einer axialen Druckkraft und einem axialen Torsionsmoment zusammensetzt.

Diese Resultate wurden alle mit Hilfe des statischen Stabilitätskriteriums gefunden, wonach die Stabilitätsgrenze durch das erstmalige Auftreten von nichttrivialen, d. h. ausgebogenen Gleichgewichtslagen bedingt ist. Nun hat aber *H. Ziegler*[6] gezeigt, daß das statische Stabilitätskriterium nur für konservative Systeme legitim ist, also insbesondere auf Systeme, in denen axiale Torsionsmomente auftreten, nicht angewendet werden darf, da diese ja im allgemeinen nicht konservativ sind. Die Resultate von *Haringx* hängen damit teilweise in der Luft und bedürften einer Überprüfung durch das kinetische Stabilitätskriterium (Untersuchung kleiner Schwingungen um die Gleichgewichtslage), das in allen Fällen gültig ist.

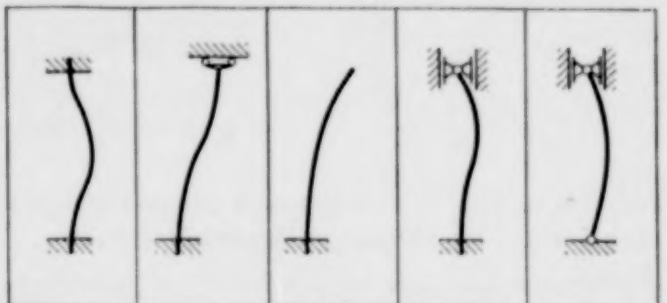


Abb. 1. Die untersuchten Lagerungen.
I. die beidseitig horizontal unverschieblich eingespannte Feder,
II. die beidseitig eingespannte Feder mit gegeneinander horizontal verschiebbaren Einspannungen,
III. die einseitig eingespannte Feder,
IV. die auf der einen Seite eingespannte, auf der andern gelenkig gelagerte Feder,
V. die beidseitig gelenkig gelagerte Feder.

Anderseits stellte *H. Ziegler*[7], indem er auf die den Momentvektor erzeugenden Einzelkräfte zurückging, fest, daß die durch die einfachsten Kraftverteilungen erzeugten Momentvektoren nur bei Einspannungen axial bleiben, bei gelenkig gelagerten oder freien Enden aber ihre Richtung ändern. Die so je nach dem Kraftangriff entstehenden semi-, quasi- und pseudotangentialen Momente sind alle konservativ. Für die Belastung mit solchen Momenten darf also wieder das statische oder auch das energetische Stabilitätskriterium angewendet werden, wonach die Stabilitätsgrenze erreicht ist, wenn die potentielle Energie des Systemes erstmals nicht mehr positiv definit ist.

In der vorliegenden Arbeit wird nun die Knickung einer Feder untersucht, deren Belastung sich aus einer axialen Druckkraft und einem solchen konservativen Torsionsmoment zusammensetzt. Im Abschnitt **2** werden die Differentialgleichungen der elastischen Linie der Feder bzw. des elastisch-äquivalenten Ersatzstabes hergeleitet. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen werden dann in Abschnitt **3** die Knickgleichungen aufgestellt und zwar für fünf Lagerungsarten (Abb. 1).

Selbstverständlich müssen in allen fünf Fällen die Lager so ausgebildet sein, daß sich die Federenden gegeneinander um die ursprüngliche Federachse verdrehen und vertikal verschieben können. Im Abschnitt **4** schließlich werden die Knickgleichungen diskutiert und in den einfacheren Fällen die kritischen Dynamen in Diagrammen dargestellt.

2. Grundlagen. a) Der Ersatzstab. Eine Schraubenfeder, deren Länge im ungespannten Zustand l_0 und deren Wicklungsradius R beträgt, sei durch die Belastung auf die Länge l zusammengedrückt. Die Feder sei so gewickelt, daß die Hauptträgheitsachsen des Drahtquerschnittes parallel

[1] *E. Hurlbrink*, Z. VDI, 54 (1910) S. 133 u. 181.
[2] *R. Grammel*, Z. angew. Math. Mech. 4 (1924) S. 384.
[3] *C. B. Biezeno* u. *J. J. Koch*, Z. angew. Math. Mech. 5 (1925) S. 379.
[4] *J. A. Haringx*, Proc. Nederl Akad. Wet. 45 (1942) S. 533 u. 650.
[5] *J. A. Haringx*, Philips Res. Rep. 3 (1948) S. 401 u. 4 (1949) S. 49.
[6] *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Phys. 4 (1953) S. 89.
[7] *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Phys. 3 (1952) S. 96.

und senkrecht zur Schraubenachse gerichtet sind; die Hauptträgheitsmomente bezüglich der Normalen bzw. Parallelen zur Schraubenachse durch den Schwerpunkt des Drahtquerschnittes seien mit I_1, bzw. I_2, das entsprechende polare Trägheitsmoment mit I_0 bezeichnet.

Nach *Biezeno-Grammel*[1] läßt sich eine solche Feder unter den üblichen vereinfachenden Annahmen (geringe Steigung, Vernachlässigung der Kontakteffekte) als weicher Stab behandeln. Aus der Verformung einer Federwindung unter verschiedenen Belastungen lassen sich die Biegesteifigkeit α, die Schubsteifigkeit β, die Drucksteifigkeit γ und die Torsionssteifigkeit δ berechnen. Diese vier Größen, die das elastische Verhalten des Ersatzstabes beschreiben, hängen im Gegensatz zu den Steifigkeiten eines realen Stabes wesentlich von der relativen Länge l/l_0 ab. Es gilt nämlich

$$\alpha = \alpha_0\, l/l_0, \quad \beta = \beta_0\, l/l_0, \quad \gamma = \gamma_0 l/l_0, \quad \delta = \delta_0\, l/l_0, \tag{2.1}$$

wobei α_0, β_0, γ_0, δ_0 Konstanten sind und die Steifigkeiten der ungespannten Feder darstellen. Man findet für ihre Kehrwerte

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_0} &= \frac{n}{l_0}\left(1 + 2\,k\,\frac{m+1}{m}\,\frac{I_1}{I_0}\right)\frac{\pi R}{E\,I_1}, \qquad \frac{1}{\beta_0} = \frac{n}{l_0}\,\frac{\pi R^3}{E\,I_2}, \\ \frac{1}{\gamma_0} &= \frac{n}{l_0}\,k\,\frac{m+1}{m}\,\frac{4\,\pi R^3}{E\,I_0}, \qquad \frac{1}{\delta_0} = \frac{n}{l_0}\,\frac{2\,\pi R}{E\,I_2}. \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Dabei bezeichnet E den Elastizitätsmodul, m die Querzahl des Materials, n die Windungszahl der Feder und k einen Profilbeiwert, der für kreisförmige Drahtquerschnitte gleich und für andere Querschnittsformen größer als eins ist.

Bei der Diskussion der Knickgleichungen in Abschnitt 4 treten noch die Größen

$$\left.\begin{aligned} a &= R^2\,\frac{\gamma_0}{\alpha_0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\,k}\,\frac{m}{m+1}\,\frac{I_0}{I_1}, \\ b &= 1 - \frac{\gamma_0}{\beta_0} = 1 - \frac{1}{4\,k}\,\frac{m}{m+1}\,\frac{I_0}{I_2} \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

auf. Im folgenden beschränken wir uns immer auf Federdraht mit der Querzahl $m = 10/3$ und hauptsächlich auf kreisförmige Drahtquerschnitte. Dann ergeben sich für die Konstanten a und b die Werte

$$\left.\begin{aligned} a &= 23/26 = 0{,}8846\,, \\ b &= 8/13 = 0{,}6154\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

Für rechteckige Drahtprofile mit den Rechteckseiten c bzw. μc parallel zur ersten bzw. zweiten Hauptrichtung (Abb. 2) erhält man für k, a und b die Werte der Tabelle 1.

Abb. 2. Eine halbe Federwindung mit rechteckigem Drahtquerschnitt.

Tabelle 1

μ	k	a	b
0	∞	1,2692	1
1/2	1,820	1,0283	0,8679
1	1,182	0,8254	0,6746
2	1,820	0,6321	0,4717
∞	∞	0,5	0,2308

Im folgenden werden nun die Knickformeln für einen durch Druck und konservative Torsion belasteten und durch die vier Steifigkeiten α, β, γ, δ elastisch gekennzeichneten Stab unter Berücksichtigung der Querkraft und der Schiebung hergeleitet, und erst bei der Diskussion dieser Gleichungen in Abschnitt 4 wird mittels der Formeln (2.1) bis (2.4) wieder auf die Feder zurückgegriffen.

b) Die Differentialgleichungen. Nach dem statischen Stabilitätskriterium wird die kritische Belastung für einen geraden Stab, der durch eine axiale Druckkraft $\vec{P}$ und durch ein vor dem Knicken axiales, konservatives Torsionsmoment $\vec{W}$ beansprucht ist, dann erreicht, wenn zum erstenmal nicht nur für die ursprünglich gerade, sondern auch für eine ausgebogene elastische Linie Gleichgewicht möglich ist.

Zur Aufstellung der Differentialgleichungen der elastischen Linie führen wir zuerst das raumfeste Koordinatensystem (x, y, z) (Abb. 3) ein, dessen z-Achse mit der ursprünglich geraden Stabachse zusammenfällt. Da für den Ersatzstab in jedem Querschnitt alle Achsen durch den Schwerpunkt Hauptachsen sind, brauchen die x- und die y-Achse nicht speziell festgelegt zu werden, während der

[1] *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, 2. Aufl. Bd. I, S. 616, Berlin, 1953.

Ursprung für jeden Knickfall geeignet gewählt werden soll. Denkt man sich dieses System im undeformierten Stab in einen beliebigen Querschnittsschwerpunkt parallel verschoben und dann die Deformation des Stabes vollzogen, wobei das System mit dem Stabquerschnitt körperfest verbunden bleibt, so gelangt man zu einem zweiten Koordinatensystem (ξ, η, ζ). Seine ζ-Achse steht zum Querschnitt normal, fällt aber wegen der Schiebung im allgemeinen nicht mit der Tangente der elastischen Linie in diesem Schnitt zusammen.

Um die Knickgleichungen zu finden, kann man sich auf kleine Ausbiegungen und Schiebungen beschränken und somit annehmen, daß die ζ-Achse nur wenig gegenüber der z-Achse geneigt sei. Im Rahmen einer linearisierten Theorie läßt sich dann die gegenseitige Stellung der beiden Koordinatensysteme, abgesehen von einer Translation, durch den Verdrehungswinkel χ des Querschnittes und durch die x- und y-Komponenten eines Einheitsvektors $\vec{n}\,(n_x, n_y, 1)$ in der Richtung der Querschnittsnormalen festlegen (Abb. 4). Der Querschnitt selbst wird durch die von 0 aus gemessene Bogenlänge t bestimmt. Unsere Aufgabe besteht in diesem Abschnitt darin, für $n_x(t)$, $n_y(t)$ und $\chi(t)$ Differentialgleichungen und deren Lösungen zu finden, denn es wird sich zeigen, daß durch diese Funktionen im wesentlichen auch die elastische Linie, d. h. $x(t)$, $y(t)$, bestimmt ist.

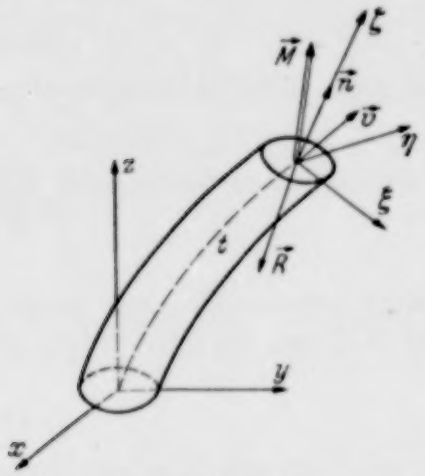


Abb. 3. Die beiden Koordinatensysteme (x, y, z) und (ξ, η, ζ).

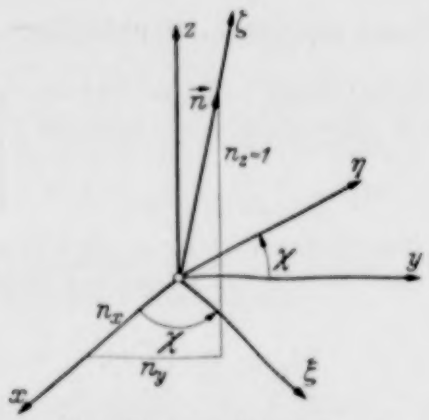


Abb. 4. Die gegenseitige Stellung der beiden Koordinatensysteme.

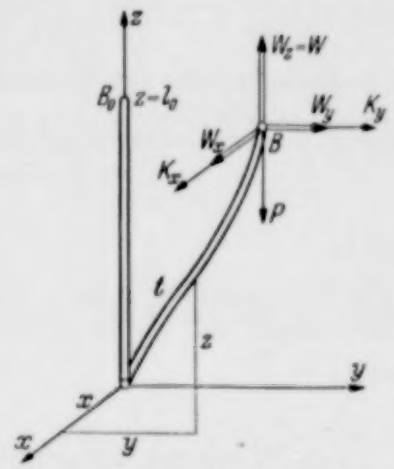


Abb. 5. Der unter einer Druckkraft und einem Torsionsmoment ausknickende Ersatzstab.

Wie man nach *H. Ziegler*[1] aus den Formeln der Kreiseltheorie herleiten kann, gelten für einen beliebigen Vektor $\vec{a}$, dessen Komponenten a_x, a_y, a_ξ, a_η von erster Ordnung klein sind gegen a_z und a_ζ, die Transformationen

$$\left.\begin{aligned} a_x &= a_\xi \cos\chi - a_\eta \sin\chi + a_\zeta\, n_x, \\ a_y &= a_\xi \sin\chi + a_\eta \cos\chi + a_\zeta\, n_y, \\ a_z &= a_\zeta\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

Bezeichnet man die Ableitungen nach t mit $'$, so folgen aus (2.5) und der Voraussetzung kleiner Schiebungen speziell für den Tangenteneinheitsvektor $\vec{v}$ die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} v_x &= x' = v_\xi \cos\chi - v_\eta \sin\chi + n_x\,, \\ v_y &= y' = v_\xi \sin\chi + v_\eta \cos\chi + n_y\,, \\ v_z &= 1 = v_\zeta\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Zur Beschreibung der elastischen Deformation des Stabes wird noch der Vektor $\vec{\varkappa}$ gebraucht, der als Ableitung nach t des vektoriellen Drehwinkels des (ξ, η, ζ)-Systems gegenüber dem (x, y, z)-System definiert ist. Nach dieser Definition ist seine Komponente $\varkappa_\zeta$ gleich dem spezifischen Verdrehungswinkel des Stabes und nach (2.5) darf dafür in erster Näherung auch $\varkappa_z$ gesetzt werden, so daß gilt

$$\varkappa_z = \varkappa_\zeta = \chi'\,. \tag{2.7}$$

Durchläuft das körperfeste System die elastische Linie gleichförmig, so stellt $\vec{\varkappa}$ seine Winkelgeschwindigkeit dar; somit gilt für die wirkliche Ableitung des in diesem System konstanten Vektors $\vec{n}$ die Gleichung

$$\frac{d\vec{n}}{dt} = \vec{\varkappa} \times \vec{n}\,. \tag{2.8}$$

[1] *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Phys. 2 (1951) S. 265.

Zerlegt man (2.8) in Komponenten, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} n_x' &= \varkappa_y - \varkappa_z n_y, \\ n_y' &= -\varkappa_x + \varkappa_z n_x, \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

während die dritte Gleichung in erster Näherung identisch erfüllt ist.

Der Stab sei am Stabende B $(t = b)$ durch ein Moment $\vec{W}$ (W_x, W_y, W) und durch eine Einzelkraft $\vec{K}$ $(K_x, K_y, -P)$ belastet (Abb. 5). Dabei sind K_x und K_y Reaktionen, bei Einspannungen sind es auch W_x und W_y. Diese Dyname erzeugt im Querschnitt F eine Beanspruchung, die durch die Dyname $\vec{R}$ (R_x, R_y, R_z); $\vec{M}$ (M_x, M_y, M_z) dargestellt wird (Abb. 3). In bekannter Weise ergeben sich dann die Gleichgewichtsbedingungen für ein Stabelement

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = 0\,, \qquad \frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{R} \times \vec{v}\,. \tag{2.10}$$

Die erste dieser Gleichungen kann mit der Randbedingung $\vec{R}(b) = \vec{K}$ sofort integriert werden, in Komponentendarstellung erhält man

$$R_x = K_x, \quad R_y = K_y, \quad R_z = -P\,. \tag{2.11}$$

Zerlegen wir auch die zweite Gleichung von (2.10) unter Verwendung von (2.11) in Komponenten, so finden wir

$$\left.\begin{aligned} M_x' &= K_y + y'\,P, \\ M_y' &= -K_x - x'\,P, \\ M_z' &= K_x y' - K_y x' \approx 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

Die Terme auf der rechten Seite der dritten Gleichung sind von zweiter Ordnung klein und können also durch Null ersetzt werden. Aus der dritten Gleichung folgt mit (2.5) und der Randbedingung $\vec{M}(b) = \vec{W}$

$$M_z = M_\zeta = W. \tag{2.13}$$

Zur Herleitung der gesuchten Differentialgleichungen benötigen wir noch den Zusammenhang zwischen der Beanspruchung und der Deformation. Im Rahmen der Festigkeitslehre gilt

$$\left.\begin{aligned} &M_\xi = \alpha\,\varkappa_\xi, \quad M_\eta = \alpha\,\varkappa_\eta, \quad M_\zeta = \delta\,\varkappa_\zeta, \\ &R_\xi = \beta\,v_\xi, \quad R_\eta = \beta\,v_\eta, \quad R_\zeta = \gamma\left(\frac{l - l_0}{l}\right). \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

Setzt man in der dritten Gleichung die Werte aus (2.7) und (2.13) ein, so folgt

$$W = \delta\,\chi',$$

also

$$\chi = \varkappa_\zeta\,t \quad \text{mit} \quad \varkappa_\zeta = \varkappa_z = \frac{W}{\delta}\,, \tag{2.15}$$

da die Integrationskonstante durch geeignete Wahl der x-Richtung zu Null gemacht werden kann.

Mit Hilfe der Formeln (2.5), angewendet auf $\vec{M}$ und $\vec{\varkappa}$, lassen sich die ersten zwei Gleichungen von (2.14) ins (x, y, z)-System übersetzen. Man findet leicht

$$M_x = \alpha\,(\varkappa_x - \varkappa_\zeta\,n_x) + M_\zeta\,n_x,$$
$$M_y = \alpha\,(\varkappa_y - \varkappa_\zeta\,n_y) + M_\zeta\,n_y$$

und, indem man $\varkappa_x$ und $\varkappa_y$ aus (2.9) entnimmt, schließlich mit (2.13) und (2.7)

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -\alpha\,n_y' + W\,n_x, \\ M_y &= \alpha\,n_x' + W\,n_y\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

In der gleichen Weise transformiert man auch die vierte und fünfte Gleichung von (2.14). Durch Anwendung von (2.5) auf $\vec{R}$ und Verwendung von (2.6) und (2.11) ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{K_x}{\beta} + n_x\left(1 + \frac{P}{\beta}\right), \\ y' &= \frac{K_y}{\beta} + n_y\left(1 + \frac{P}{\beta}\right). \end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

Aus diesen Beziehungen ersieht man, daß es berechtigt ist, n_x und n_y als die eigentlichen Unbekannten zu wählen, denn sind diese und die Konstanten K_x und K_y bekannt, so würde sich die elastische Linie selbst durch Integration von (2.17) bestimmen lassen.

Setzt man jetzt (2.17) und die Ableitungen von (2.16) in (2.12) ein und ordnet, dann findet man die gesuchten Differentialgleichungen für n_x und n_y

$$\left.\begin{aligned} \alpha\, n_x'' + W\, n_y' + P\left(1+\frac{P}{\beta}\right) n_x &= -K_x\left(1+\frac{P}{\beta}\right), \\ \alpha\, n_y'' - W\, n_x' + P\left(1+\frac{P}{\beta}\right) n_y &= -K_y\left(1+\frac{P}{\beta}\right). \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

Diese Gleichungen, sowie auch die Beziehungen (2.16), die noch für die Aufstellung der Randbedingungen gebraucht werden, können mit den komplexen Größen

$$\boldsymbol{N} = n_x + i\, n_y, \quad \boldsymbol{K} = K_x + i\, K_y, \quad \boldsymbol{M} = M_x + i\, M_y \tag{2.19}$$

komplex zusammengefaßt werden und lauten dann

$$\alpha\, \boldsymbol{N}'' - i\, W\, \boldsymbol{N}' + P\left(1+\frac{P}{\beta}\right)\boldsymbol{N} = -\boldsymbol{K}\left(1+\frac{P}{\beta}\right), \tag{2.18a}$$

$$\boldsymbol{M} = \alpha\, i\, \boldsymbol{N}' + W\, \boldsymbol{N}. \tag{2.16a}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise und um die Resultate besser diskutieren zu können, führen wir dimensionslose Größen ein. Wir ersetzen die unabhängige Variable t durch

$$\bar{t} = \frac{t}{l} \tag{2.20}$$

und versehen jede von $\bar{t}$ abhängige Funktion auch mit einem Querstrich. Für eine beliebige reelle oder komplexe Funktion f gelten dann die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= \bar{f}(\bar{t}), \\ f'(t) &= \frac{df}{dt} = \frac{1}{l}\frac{d\bar{f}}{d\bar{t}} = \frac{1}{l}\bar{f}'(\bar{t}), \\ f''(t) &= \frac{d^2f}{dt^2} = \frac{1}{l^2}\frac{d^2\bar{f}}{d\bar{t}^2} = \frac{1}{l^2}\bar{f}''(\bar{t}). \end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

Dividieren wir die Gleichung (2.18 a) durch α/l^2 und benützen noch die dimensionslosen Größen

$$p = \frac{P\,l^2}{\alpha}, \quad w = \frac{W\,l}{2\,\alpha}, \quad \boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{K}\,l^2}{\alpha}, \quad \boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{M}\,l}{2\,\alpha}, \quad w_x = \frac{W_x\,l}{2\,\alpha}, \quad w_y = \frac{W_y\,l}{2\,\alpha}, \quad \varepsilon = \frac{\alpha}{\beta\,l^2} \tag{2.22}$$

so lautet die gesuchte Differentialgleichung schließlich

$$\bar{\boldsymbol{N}}'' - 2\,i\,w\,\bar{\boldsymbol{N}}' + p\,(1+\varepsilon\,p)\,\bar{\boldsymbol{N}} = -\boldsymbol{k}\,(1+\varepsilon\,p), \tag{2.18b}$$

während die Beziehung (2.16 a) in

$$\bar{\boldsymbol{m}} = \frac{i}{2}\,\bar{\boldsymbol{N}}' + w\,\bar{\boldsymbol{N}} \tag{2.16b}$$

übergeht.

Mit den komplexen Integrationskonstanten

$$\boldsymbol{A} = A_r + i\,A_i; \quad \boldsymbol{B} = B_r + i\,B_i; \quad \boldsymbol{C} = C_r + i\,C_i \tag{2.23}$$

findet man als allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2.18 b)

$$\bar{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{A}\,e^{i\lambda_1\bar{t}} + \boldsymbol{B}\,e^{i\lambda_2\bar{t}} + \boldsymbol{C}. \tag{2.24}$$

Dabei ist

$$\boldsymbol{C} = -\frac{\boldsymbol{k}}{p}, \tag{2.25}$$

und λ_1, λ_2 sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$-\lambda^2 + 2\,w\,\lambda + p\,(1+\varepsilon\,p) = 0. \tag{2.26}$$

Mit der Abkürzung

$$q = \sqrt{w^2 + p\,(1+\varepsilon\,p)} \tag{2.27}$$

ergeben sich dafür die Werte

$$\lambda_{1,2} = w \pm q \,. \tag{2.28}$$

Die partikuläre Lösung (2.25) wird ungültig für den Grenzfall $p = 0$ (reine Torsionsbelastung). Dann erhält man als Lösung von (2.18 b)

$$\bar{N} = A\, e^{2 i w \bar{t}} + B + C\, \bar{t} \tag{2.24 a}$$

mit

$$C = -\frac{i\,k}{2\,w} \,. \tag{2.25 a}$$

Damit wir die den verschiedenen Knickfällen zugehörigen Randbedingungen aufstellen können, müssen wir zuerst die verschiedenen konservativen Torsionsmomente einführen.

c) Konservative Torsionsmomente. Um die konservativen Torsionsmomente zu finden, berechnen wir die virtuelle Arbeit δA_w der an den Enden B und A des Stabes angreifenden Torsionsmomente $\vec{W}_B(W_{bx},\ W_{by},\ W_{bz} = +W)$ und $\vec{W}_A(W_{ax},\ W_{ay},\ W_{az} = -W)$. Man findet dafür nach *H. Ziegler*[1], indem man dort überall wegen der Schiebung den Tangentenvektor $\vec{v}$ durch den Normalenvektor $\vec{n}$ ersetzt,

$$\delta A_w = W \int_a^b (n_x\, \delta\, n_y' - n_y\, \delta\, n_x' + \delta\, \varkappa_z)\, dt + (W_{by}\, \delta\, n_{bx} - W_{bx}\, \delta\, n_{by}) + (W_{ay}\, \delta\, n_{ax} - W_{ax}\, \delta\, n_{ay}) \,.$$

Formt man diesen Ausdruck noch etwas um, so kommt man auf

$$\delta A_w = \delta\left[\frac{1}{2}\, W \int_a^b (n_x\, n_y' - n_y\, n_x' + 2\, \varkappa_z)\, dt\right] + \left(W_{by} - \frac{1}{2}\, W_{bz}\, n_{by}\right)\delta\, n_{bx} - \left(W_{bx} - \frac{1}{2}\, W_{bz}\, n_{bx}\right)\delta\, n_{by}$$
$$+ \left(W_{ay} - \frac{1}{2}\, W_{az}\, n_{ay}\right)\delta\, n_{ax} - \left(W_{ax} - \frac{1}{2}\, W_{az}\, n_{ax}\right)\delta\, n_{ay} \,. \tag{2.29}$$

Die Torsionsmomente $\vec{W}_B$ und $\vec{W}_A$ sind aber dann und nur dann konservativ, wenn sich auch die Randterme als Variation eines Potentials darstellen lassen. Hierfür ergibt sich die Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial n_y}\left(W_y - \frac{1}{2}\, W_z\, n_y\right) = \frac{\partial}{\partial n_x}\left(\frac{1}{2}\, W_z\, n_x - W_x\right),$$

die an beiden Stabenden gelten muß. (Die Zeiger a und b sind hier und im folgenden der Einfachheit halber weggelassen.) Wertet man diese Bedingung gemäß dem Vorgehen von *M. Beck*[2] mit einem linearen Ansatz

$$W_x = W_z\,(A^*\, n_x + B^*\, n_y), \qquad W_y = W_z\,(C^*\, n_x + D^*\, n_y) \tag{2.30}$$

aus, so erhält man für konservative Momente die Beziehung

$$A^* + D^* = 1 \,. \tag{2.31}$$

Von diesen allgemeinen konservativen Momenten (2.30) und (2.31) greifen wir drei Typen heraus, die sich verhältnismäßig einfach realisieren lassen, nämlich

1. das semitangentiale Moment, mit

$$A^* = D^* = \frac{1}{2}, \quad B^* = C^* = 0; \quad \text{also} \quad W_x = \frac{1}{2}\, W_z\, n_x, \qquad W_y = \frac{1}{2}\, W_z\, n_y. \tag{2.32 s}$$

2. das quasitangentiale Moment, mit

$$A^* = 1, \quad B^* = C^* = D^* = 0; \quad \text{also} \quad W_x = W_z\, n_x, \quad W_y = 0. \tag{2.32 q}$$

3. das pseudotangentiale Moment, mit

$$A^* = 1, \quad B^* = \operatorname{tg}\tau, \quad C^* = D^* = 0; \quad \text{also} \quad W_x = W_z\,(n_x + \operatorname{tg}\tau\, n_y), \quad W_y = 0. \tag{2.32 p}$$

Nach *H. Ziegler*[1] (wobei man auch hier in unserem Falle wegen der Schiebung den Tangentenvektor $\vec{v}$ durch den Normalenvektor $\vec{n}$ zu ersetzen hat) lassen sich diese Momente so realisieren, daß man in den Fällen 1) und 2) den Endquerschnitt des Stabes starr mit einer Kreisscheibe verbindet und an dieser gleichmäßig verteilte, tangentiale Kräfte von konstantem und gleichem Betrag K

[1] Vgl. die in Fußnote 7 von Seite 113 zitierte Arbeit S. 104—105.
[2] *M. Beck*, Ing.-Arch. 23 (1955) S. 231.

und konstanter Richtung angreifen läßt, und zwar für das quasitangentiale Moment zwei und für das semitangentiale Moment drei oder mehr (Abb. 6).

Um das pseudotangentiale Moment zu erzeugen, ist der Stabquerschnitt starr mit einem Querbalken zu verbinden, an dessen Enden ein Kräftepaar mit Kräften von konstantem Betrag und konstanter Richtung angreift. τ bedeutet dabei den Drehwinkel des Querbalkens, die vertikale Komponente W des Momentes hat dann den Betrag

$$W = 2\,a\,K\cos\tau\,. \qquad (2.33)$$

Je nachdem, ob der Stab am zweiten Ende a) starr eingespannt ist, oder b) sich axial drehen kann, ist τ gleich dem ganzen oder halben totalen Verdrehungswinkel

$$\omega = \varkappa_\zeta\, l \qquad (2.34)$$

des Stabes. Mit (2.15) erhält man also

$$\tau = \omega = \frac{W\,l}{\delta}\,, \qquad (2.35\,a)$$

bzw. $$\tau = \omega/2 = \frac{W\,l}{2\,\delta}\,. \qquad (2.35\,b)$$

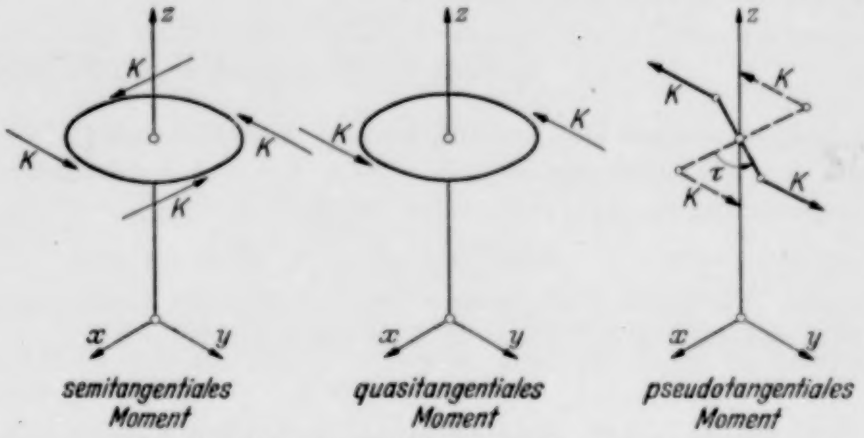


Abb. 6. Die drei konservativen Momente.

Weil aber τ nicht größer als $\pi/2$ werden kann, folgt daraus, daß auch W beschränkt ist, nämlich

$$W < \pi\,\frac{\delta}{2\,l}\,, \qquad (2.36\,a)$$

bzw.

$$W < \pi\,\frac{\delta}{l}\,. \qquad (2.36\,b)$$

Schließlich ist noch zu bemerken, daß wegen (2.30) im allgemeinen weder das axiale ($A^* = B^* = C^* = D^* = 0$), noch das tangentiale ($A^* = D^* = 1$, $B^* = C^* = 0$) Moment konservativ sind. Sind freilich beide Stabenden eingespannt (Lagerungen I und II), so sind $\delta\,n_{ax} = \delta\,n_{ay} = \delta\,n_{bx} = \delta\,n_{by} = 0$ und die Randterme in (2.29) fallen weg, das belastende Moment ist dann immer konservativ, und es läßt sich nicht mehr zwischen axialen, semitangentialen und quasitangentialen Momenten unterscheiden; nur das pseudotangentiale Moment wahrt wegen (2.36 a, b) noch eine gewisse Sonderstellung.

3. Die Knickgleichungen. Wie jedes Knickproblem ist auch dieses mathematisch ein Eigenwertproblem. Es handelt sich darum, die Eigenwerte p und w so zu wählen, daß die Lösung (2.24) unter Berücksichtigung der Randbedingungen nicht identisch verschwindet. Zu jedem Knickfall gehören drei komplexe oder sechs reelle Randbedingungen, die für die drei komplexen Unbekannten $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$ oder ihre sechs Real- und Imaginärteile ein lineares, homogenes Gleichungssystem liefern. Ein solches Gleichungssystem mit gleich viel Unbekannten wie Gleichungen besitzt dann und nur dann eine von Null verschiedene Lösung, wenn seine Determinante verschwindet. Durch diese Forderung erhält man die gesuchte Knickgleichung, die eine Beziehung zwischen den kritischen Werten p und w darstellt.

a) Knickfall I. Für den beidseitig eingespannten Stab wählen wir den Koordinatenursprung des (x, y, z)-Systems in der Stabmitte, so daß den Stabenden A und B die dimensionslosen Bogenlängen $\bar{t} = -1/2$ und $\bar{t} = +1/2$ zugeordnet sind. Die Einspannungen an den Enden des Stabes ergeben auf Grund der Definition des Vektors $\vec{n}$ und mit den Beziehungen (2.19) und (2.21)

$$\bar{\boldsymbol{N}}\left(\frac{1}{2}\right) = \bar{\boldsymbol{N}}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0\,. \qquad (3.1)$$

Setzt man $\bar{\boldsymbol{N}}$ nach (2.24) in (3.1) ein, dann entstehen die Gleichungen

$$\boldsymbol{A}\,e^{i\frac{\lambda_1}{2}} + \boldsymbol{B}\,e^{i\frac{\lambda_2}{2}} + \boldsymbol{C} = 0\,, \qquad \boldsymbol{A}\,e^{-i\frac{\lambda_1}{2}} + \boldsymbol{B}\,e^{-i\frac{\lambda_2}{2}} + \boldsymbol{C} = 0\,. \qquad (3.2)$$

Ferner ist zu fordern, daß die Verschiebung zwischen den beiden Stabenden in der x- und der y-Richtung Null ist, d. h. daß

$$\int_{-l/2}^{l/2} x'\,dt = \int_{-l/2}^{l/2} y'\,dt = 0 \tag{3.3}$$

gilt. Indem man wieder auf komplexe und dimensionslose Größen übergeht, kann man mit (2.17), (2.19), (2.21) und (2.22) für (3.3)

$$\int_{-1/2}^{1/2} (\bar{x}' + i\,\bar{y})\,d\bar{t} = \int_{-1/2}^{1/2} [\bar{N}(1+\varepsilon p) + \varepsilon k]\,d\bar{t} = 0 \tag{3.4}$$

schreiben, woraus sich schließlich durch Einsetzen von (2.24), Ausführen des Integrals und Multiplizieren der Gleichung mit $\lambda_1 \lambda_2 = -p(1+\varepsilon p)$ (wegen (2.28) und (2.27)) die Beziehung

$$A\lambda_2\left(e^{i\frac{\lambda_1}{2}} - e^{-i\frac{\lambda_1}{2}}\right) + B\lambda_1\left(e^{i\frac{\lambda_2}{2}} - e^{-i\frac{\lambda_2}{2}}\right) - C\,i\,p = 0 \tag{3.5}$$

ergibt. Die gleich Null gesetzte Determinante des Gleichungssystems (3.2) (3.5) liefert jetzt unter Verwendung von (2.27) und (2.28) die Knickgleichung

$$2q(\cos w - \cos q) - p \sin q = 0\,. \tag{I}$$

b) Knickfall II. Sind die beiden Stabenden gegeneinander horizontal verschiebbar, so treten keine Querkräfte auf. Wegen (2.19), (2.22) und (2.25) folgt sofort

$$C = 0\,. \tag{3.6}$$

Wählt man hier den Koordinantenursprung des (x, y, z)-Systems im unteren Stabende, so ergeben die wie im Fall I hergeleiteten Einspannbedingungen $\bar{N}(0) = \bar{N}(1) = 0$ mit (2.24) und (3.6) die Gleichungen

$$A + B = 0\,, \quad A e^{i\lambda_1} + B e^{i\lambda_1} = 0\,. \tag{3.7}$$

Setzt man die Determinante dieses Systems gleich Null, so folgt mit (2.27) und (2.28)

$$w^2 + p(1+\varepsilon p) = h^2\pi^2\,, \qquad (h = 1, 2, 3\ldots)$$

und wenn wir uns hier, wie auch im folgenden, auf die kleinsten Knickwerte beschränken

$$w^2 + p(1+\varepsilon p) = \pi^2\,. \tag{II}$$

c) Knickfall III. Wie im Fall II gilt auch hier wegen des Wegfallens der Querkräfte die Gleichung (3.6) und damit wegen der Einspannung am unteren Stabende — das auch hier Ursprung des (x, y, z)-Systems ist — die Gleichung

$$A + B = 0\,. \tag{3.8}$$

Das belastende Torsionsmoment liefert die dritte Gleichung, doch haben wir zwischen den verschiedenen Belastungsarten zu unterscheiden.

α) Semitangentiales Moment. Setzt man in der ersten und zweiten Komponentengleichung der Randbedingung

$$\vec{M}(l) = \vec{M}' \tag{3.9}$$

die Werte für das semitangentiale Moment (2.32 s) ein und geht mit (2.19), (2.20), (2.21) und (2.22) wieder auf komplexe und dimensionslose Größen über, so entsteht die Beziehung

$$\bar{m}(1) = \frac{w}{2}\bar{N}(1)\,. \tag{3.10}$$

Mit Hilfe von (2.16 b) entsteht aus (3.10) die Gleichung

$$\bar{N}'(1) - i\,w\,\bar{N}(1) = 0\,. \tag{3.11}$$

Setzt man jetzt die Lösung (2.24) unter Berücksichtigung von (3.6) und (3.8) in (3.11) ein, so erhält man mit (2.28) und (2.27) die Knickgleichung

$$w^2 + p(1+\varepsilon p) = \frac{\pi^2}{4}\,. \tag{III s}$$

β) Quasi- und pseudotangentiales Moment. Diese beiden Fälle können gemeinsam behandelt werden, denn rein formal kann das quasitangentiale Moment (2.32 q) aus dem pseudotangen-

tialen (2.32 p) erhalten werden, indem man $\operatorname{tg}\tau$ durch Null ersetzt. Führt man diese Substitution erst in der pseudotangentialen Knickformel aus, so erhält man die Knickgleichung für das quasitangentiale Moment und eine direkte Berechnung erübrigt sich.

Für das pseudotangentiale Moment (2.32 p) ergeben sich in dimensionsloser Schreibweise mit (2.20), (2.21) und (2.22) die Komponenten

$$w_x = w\,[\bar{n}_x(1) + \operatorname{tg}\tau\,\bar{n}_y(1)], \qquad w_y = 0\,. \tag{3.12}$$

Da sich diese komplex zusammengefaßt nicht durch $\bar{N}$ ausdrücken lassen, ist es nötig, die Gleichung (2.26 b) gemäß (2.19) in Real- und Imaginärteil zu zerlegen. Es ergibt sich

$$\bar{m}_x(\bar{t}) = -\frac{1}{2}\,\bar{n}_y'(\bar{t}) + w\,\bar{n}_x(\bar{t})\,, \qquad \bar{m}_y(\bar{t}) = \frac{1}{2}\,\bar{n}_x'(\bar{t}) + w\,\bar{n}_y(\bar{t})\,, \tag{3.13}$$

und indem man die Randbedingung (3.9) mit (3.12) und (3.13) auswertet, entstehen die Gleichungen

$$\bar{n}_y'(1) + 2\,w\,\operatorname{tg}\tau\,\bar{n}_y(1) = 0\,, \qquad \bar{n}_x'(1) + 2\,w\,\bar{n}_y(1) = 0\,. \tag{3.14}$$

Zerlegt man die Lösung (2.24) mit (2.23) in Real- und Imaginärteil und setzt sie, sowie ihre Ableitung, unter Berücksichtigung von (3.6) und (3.8) in (3.14) ein, so bekommt man mit (2.28) die beiden Gleichungen

$$A_r[\lambda_1\cos\lambda_1 - \lambda_2\cos\lambda_2 + 4\,w\,\operatorname{tg}\tau\sin q\cos w] + A_i[-\lambda_1\sin\lambda_1 + \lambda_2\sin\lambda_2 - 4\,w\,\operatorname{tg}\tau\sin q\sin w] = 0\,,$$
$$A_r[\lambda_2\sin\lambda_1 - \lambda_1\sin\lambda_2] + A_i[\lambda_2\cos\lambda_1 - \lambda_1\cos\lambda_2] = 0\,.$$

Durch Nullsetzen der Determinante erhält man mit (2.27) und (2.28) die Knickgleichung

$$p\,(1 + \varepsilon\,p) + (w^2 + q^2)\cos 2\,q + 2\,w\,q\,\operatorname{tg}\tau\sin 2\,q = 0\,,$$

die durch goniometrische Umformung und Abspaltung des Faktors $\sin^2 q$ auf die Form

$$q^2\operatorname{ctg}^2 q + 2\,w\,q\,\operatorname{tg}\tau\operatorname{ctg} q - w^2 = 0 \tag{III p}$$

gebracht werden kann.

Indem man $\operatorname{tg}\tau$ durch Null ersetzt, erhält man jetzt auch die Knickgleichung des quasitangentialen Momentes

$$q^2\operatorname{ctg}^2 q - w^2 = 0\,. \tag{III q}$$

d) Knickfall IV. Da hier infolge des Auftretens von Querkräften C nicht mehr Null ist, ergibt die Einspannbedingung am unteren Stabende ($\bar{t} = 0$) statt (3.8)

$$A + B + C = 0\,. \tag{3.15}$$

Eine zweite Gleichung folgt aus der Bedingung, daß die Stabenden in der x- und der y-Richtung nicht gegeneinander verschiebbar sind. Diese wird wie im Falle I hergeleitet, nur daß den Stabenden jetzt die Bogenlängen 0 und 1 zugeordnet sind. Die Rechnung führt auf

$$A\,\lambda_2\,(e^{i\lambda_1} - 1) + B\,(\lambda_2\,e^{i\lambda_2} - 1) - C\,i\,p = 0\,. \tag{3.16}$$

Für die dritte Randbedingung hat man wieder zwischen den belastenden Momenten zu unterscheiden.

α) Semitangentiales Moment. Genau gleich wie im Falle III s führt die Belastung durch ein semitangentiales Moment auf die Randbedingung (3.11) oder ausgerechnet mit (2.24), (2.27) und (2.28) auf

$$A\,q\,e^{i\lambda_1} - B\,q\,e^{i\lambda_2} - C\,w = 0\,. \tag{3.17}$$

Setzt man die Determinante der drei Gleichungen (3.15), (3.16) und (3.17) gleich Null, dann entsteht mit (2.27) und (2.28) die Knickgleichung

$$p\,q\cos q - (w^2 + q^2)\sin q + 2\,w\,q\sin w = 0\,. \tag{IV s}$$

β) Quasi- und pseudotangentiales Moment. Von Fall III p kann die Randbedingung (3.14) übernommen werden. Setzt man die zerlegte Lösung (2.24) und ihre Ableitung in (3.14) ein und drückt C gemäß (3.15) durch A und B aus, so ergeben sich mit (2.28) die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &A_r[\lambda_1\cos\lambda_1 + 2\,w\,\operatorname{tg}\tau\sin\lambda_1] + A_i[-\lambda_1\sin\lambda_1 + 2\,w\,\operatorname{tg}\tau\,(\cos\lambda_1 - 1)] \\ &\quad + B_r[\lambda_2\cos\lambda_2 + 2\,w\,\operatorname{tg}\tau\sin\lambda_2] + B_i[-\lambda_2\sin\lambda_2 + 2\,w\,\operatorname{tg}\tau\,(\cos\lambda_2 - 1)] = 0\,, \\ &A_r\,\lambda_2\sin\lambda_1 + A_i[\lambda_2\cos\lambda_1 - 2\,w] + B_r\,\lambda_1\sin\lambda_2 + B_i[\lambda_1\cos\lambda_2 - 2\,w] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

Zwei weitere Gleichungen für A_r, A_i, B_r und B_i liefert die Beziehung (3.16), wenn man sie unter Berücksichtigung von (3.15) in Real- und Imaginärteil zerlegt. Durch einige Umrechnungen dieser vier Gleichungen gelangt man schließlich zur Determinantenbedingung

$$\begin{vmatrix} p & \lambda_1 & p & \lambda_2 \\ \lambda_2(1-\cos\lambda_1) & p+\lambda_2\sin\lambda_1 & \lambda_1(1-\cos\lambda_2) & p+\lambda_1\sin\lambda_2 \\ \lambda_2\sin\lambda_1+p & \lambda_2(\cos\lambda_1-1) & \lambda_1\sin\lambda_2+p & \lambda_1(\cos\lambda_2-1) \\ \lambda_1\cos\lambda_1+2w\,\mathrm{tg}\,\tau\sin\lambda_1 & -\lambda_1\sin\lambda_1+2w\,\mathrm{tg}\,\tau(\cos\lambda_1-1) & \lambda_2\cos\lambda_2+2w\,\mathrm{tg}\,\tau\sin\lambda_2 & -\lambda_2\sin\lambda_2+2w\,\mathrm{tg}\,\tau\cos(\lambda_2-1) \end{vmatrix} = 0\,. \quad \text{(IVp)}$$

Die Knickgleichung für das quasitangentiale Moment erhält man wie im Fall III, indem man $\mathrm{tg}\,\tau$ durch Null ersetzt,

$$\begin{vmatrix} p & \lambda_1 & p & \lambda_2 \\ \lambda_2(1-\cos\lambda_1) & p+\lambda_2\sin\lambda_1 & \lambda_1(1-\cos\lambda_2) & p+\lambda_1\sin\lambda_2 \\ \lambda_2\sin\lambda_1+p & \lambda_2(\cos\lambda_1-1) & \lambda_1\sin\lambda_2+p & \lambda_1(\cos\lambda_2-1) \\ \lambda_1\cos\lambda_1 & -\lambda_1\sin\lambda_1 & \lambda_2\cos\lambda_2 & -\lambda_2\sin\lambda_2 \end{vmatrix} = 0\,. \quad \text{(IVq)}$$

e) Knickfall V. Sind beide Enden des Stabes gelenkig gelagert, so können an beiden Enden konservative Momente, die nicht axial bleiben, angebracht werden. Wir beschränken uns hier auf Fälle, wo an beiden Enden gleichartige Momente angebracht werden. Ferner sollen beim quasi- und beim pseudotangentialen Moment die erzeugenden Kräfte an beiden Stabenden parallel sein. Mit dem Koordinatenursprung des (x, y, z)-Systems in der Stabmitte findet man als erste Randbedingung wie im Falle I die Gleichung (3.5). Für die weiteren Randbedingungen treffen wir die bekannte Fallunterscheidung.

α) Zwei semitangentiale Momente. Die Bedingungen für die Momente lauten an den beiden Stabenden allgemein

$$\vec{M}\left(\frac{l}{2}\right) = +\vec{W}_B\,, \qquad \vec{M}\left(-\frac{l}{2}\right) = -\vec{W}_A\,, \tag{3.19}$$

wobei zu beachten ist, daß für die vertikalen Komponenten gilt $W_{bz} = W$ und $W_{az} = -W$. Durch Einsetzen des semitangentialen Momentes (2.32s), Übergang auf dimensionslose und komplexe Größen und Verwenden der Lösung (2.24) erhält man völlig analog zum Fall IVs die beiden (3.17) entsprechenden Gleichungen

$$A\,q\,e^{i\frac{\lambda_1}{2}} - B\,q\,e^{i\frac{\lambda_2}{2}} - C\,w = 0\,, \qquad A\,q\,e^{-i\frac{\lambda_1}{2}} - B\,q\,e^{-i\frac{\lambda_2}{2}} - C\,w = 0\,.$$

Zusammen mit (3.5) führen sie auf die Knickgleichung

$$2\,w^2\cos w - 2\,w^2\cos q - p\,q\sin q = 0\,. \quad \text{(Vs-s)}$$

β) Zwei quasi- oder zwei pseudotangentiale Momente. Wertet man die Randbedingungen (3.19) für das pseudotangentiale Moment (2.32p) aus, so ergeben sich mit dem Vorgehen des Falles IIIp die zu (3.14) analogen vier Gleichungen

$$\bar{n}_x'\left(\pm\frac{1}{2}\right) + 2\,w\,\bar{n}_y\left(\pm\frac{1}{2}\right) = 0\,, \qquad \bar{n}_y'\left(\pm\frac{1}{2}\right) \pm 2\,w\,\mathrm{tg}\,\tau\,\bar{n}_y\left(\pm\frac{1}{2}\right) = 0\,.$$

Durch Einsetzen der Lösung (2.24) und ihrer Ableitung, sowie durch geeignete Addition und Subtraktion von Gleichungspaaren, erhält man daraus mit (2.28) die vier Beziehungen

$$A_i\lambda_2\cos\frac{\lambda_1}{2} + B_i\lambda_1\cos\frac{\lambda_2}{2} + C_i\,2\,w = 0\,,$$

$$A_r\lambda_2\sin\frac{\lambda_1}{2} + B_r\lambda_1\sin\frac{\lambda_2}{2} = 0\,,$$

$$A_r\left[\lambda_1\cos\frac{\lambda_1}{2} + 2\,w\,\mathrm{tg}\,\tau\sin\frac{\lambda_1}{2}\right] + B_r\left[\lambda_2\cos\frac{\lambda_2}{2} + 2\,w\,\mathrm{tg}\,\tau\sin\frac{\lambda_2}{2}\right] = 0\,,$$

$$A_i\left[\lambda_1\sin\frac{\lambda_1}{2} - 2\,w\,\mathrm{tg}\,\tau\cos\frac{\lambda_1}{2}\right] + B_i\left[\lambda_2\sin\frac{\lambda_2}{2} - 2\,w\,\mathrm{tg}\,\tau\cos\frac{\lambda_2}{2}\right] - C_i\,2\,w\,\mathrm{tg}\,\tau = 0\,.$$

Dazu kommen noch die beiden Gleichungen, die durch die Zerlegung der Beziehung (3.5) entstehen. Die Determinante dieses Systems von sechs Gleichungen läßt sich nach einigen elementaren Umformungen in ein Produkt zerlegen. Man findet so als Knickgleichung für den pseudotangentialen Fall

$$\left.\begin{aligned}&\{(w^2+q^2)\sin q - 2\,w\,q\sin w + 2\,w\,\mathrm{tg}\,\tau\,q\,(\cos w-\cos q)\}\cdot\\&\{2\,w\,\mathrm{tg}\,\tau\,[p\,q\,(\cos q+\cos w)+4\,w\,q\sin w-(2\,w^2+2\,q^2)\sin q]\\&\quad+8\,w^2\,q\,(\cos w-\cos q)-p(w^2+q^2)\sin q-2\,p\,w\,q\sin w\}=0\,,\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{Vp\text{-}p)$$

und daraus für den quasitangentialen Fall

$$\{(w^2+q^2)\sin q-2\,w\,q\sin w\}\;\{8\,w^2\,q\,(\cos w-\cos q)-p\,(w^2+q^2)\sin q-2\,p\,w\,q\sin w\}=0\,.\qquad(\mathrm{Vq\text{-}q})$$

Bevor wir die elf Knickgleichungen genauer diskutieren, bemerken wir noch, daß sie für unendliche Schubsteifigkeit β, also nach (2.22) und (2.27) für $\varepsilon=0$ und $q=(w^2+p)^{1/2}$ in die entsprechenden Formeln für den schlanken Stab übergehen, die von *M. Beck*[1] berechnet wurden. Ferner stimmen die Knickgleichungen in den Fällen I und II überein mit den Gleichungen, die *Haringx*[2] gefunden hat.

4. Auswertung und Diskussion. Um die Diskussion bequem durchführen zu können, müssen in den Knickgleichungen Variable auftreten, die zu den eigentlichen kritischen Lasten P und W proportional sind. Die Größe w erfüllt diese Bedingung und wird deshalb als die das Torsionsmoment W charakterisierende Variable verwendet, denn nach (2.22) und (2.1) gilt

$$w=\frac{W\,l_0}{2\,\varkappa_0}\,.\qquad(4.1)$$

In gewissen Fällen wird W auch durch den totalen Verdrehungswinkel ω ausgedrückt werden, denn mit (2.34), (2.15), (2.1) und (4.1) erhält man

$$\omega=\frac{W\,l_0}{\delta_0}=\frac{2\,\varkappa_0}{\delta_0}\,w\,.\qquad(4.2)$$

Dagegen ist die Größe p nicht zur Druckkraft P proportional, weil in (2.22) der Beiwert $l^2/\varkappa$ selbst mit P variiert. Zweckmäßigerweise verwendet man zur Charakterisierung der Druckkraft P in den Knickgleichungen die negative Federdehnung

$$\xi=1-\frac{l}{l_0}\,.\qquad(4.3)$$

Die letzte Gleichung von (2.14) lautet nämlich dann mit (2.11), (4.3) und (2.1)

$$P=\gamma_0\,\xi\,,\qquad(4.4)$$

also ist ξ zu P proportional. Die in den Knickgleichungen auftretenden Größen p und $p\,(1+\varepsilon\,p)$ lassen sich mit (4.3), (2.22) und (2.1) durch ξ und Konstanten ausdrücken. Man findet

$$p=\frac{\gamma_0\,l_0^2}{\varkappa_0}(1-\xi)\,\xi\,,\qquad p\,(1+\varepsilon\,p)=\frac{\gamma_0\,l_0^2}{\varkappa_0}\left[\xi+\xi^2\left(\frac{\gamma_0}{\beta_0}-1\right)\right].\qquad(4.5)$$

Diese Formeln lassen sich unter Verwendung der nur von der Drahtquerschnittsform und dem Material abhängigen Parameter a und b (2.3) sowie durch Einführung des Schlankheitsgrades

$$s=\frac{l_0}{2\,R}\qquad(4.6)$$

als

$$p=4\,a\,s^2\,(1-\xi)\,\xi\,,\qquad p\,(1+\varepsilon\,p)=4\,a\,s^2\,(1-b\,\xi)\,\xi\qquad(4.7)$$

schreiben.

Bevor wir uns der Diskussion der allgemeinen Knickformeln zuwenden, wollen wir noch die Spezialfälle untersuchen, die sich durch Weglassen des Torsionsmomentes oder der Druckkraft ergeben.

a) Reine Druckbeanspruchung. Setzt man in den verschiedenen Knickformeln überall w und τ gleich Null, so ergeben sich unter Verwendung der Substitution (4.7) die folgenden Gleichungen zwischen dem Schlankheitsgrad s und der negativen Federdehnung ξ.

---

[1] Siehe Fußnote 2 von Seite 118.
[2] Siehe Fußnoten 4 u. 5 von Seite 113.

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Knickfall I:} && s^2\, a\,(1-b\,\xi)\,\xi = \pi^2.\\
&\text{Knickfall II:} && 4\,s^2\, a\,(1-b\,\xi)\,\xi = \pi^2.\\
&\text{Knickfall III:} && 16\,s^2\, a\,(1-b\,\xi)\,\xi = \pi^2.\\
&\text{Knickfall IV:} && \operatorname{tg} 2\,s\sqrt{a\,(1-b\,\xi)\,\xi} = \frac{2\,a\,s(1-\xi)\,\xi}{\sqrt{a\,(1-b\,\xi)\,\xi}}.\\
&\text{Knickfall V:} && 4\,s^2\, a\,(1-b\,\xi)\,\xi = \pi^2.
\end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

Natürlich kann man diese Gleichungen, die mit den von *Haringx* gefundenen Formeln identisch sind, sowohl aus der semi-, quasi- oder pseudotangentialen Knickformel des entsprechenden Falles herleiten, da mit verschwindendem Torsionsmoment diese Unterschiede hinfällig werden müssen; ja im Knickfall V, wo sich die quasi- und die pseudotangentiale Knickformel in zwei Faktoren zerlegen lassen, zeigt es sich, daß beide Faktoren auf die Gleichung (4.8 V) führen. Der durch die Gleichungen (4.8) gegebene Zusammenhang zwischen ξ und s ist in Abb. 9, 10, 11 und 12 durch die Kurven $w = 0$ graphisch dargestellt; die Diskussion wird im Rahmen des allgemeinen Knickproblems später durchgeführt.

b) Reine Torsionsbeanspruchung. Setzt man in den Knickgleichungen p gleich Null, dann erhält man die kritischen Momente für reine Torsionsbeanspruchung, die zur Unterscheidung vom allgemeinen Fall mit dem Zeiger $_0$ versehen werden. Die Tatsache, daß die allgemeine Lösung (2.24) für diesen Spezialfall nicht richtig ist, führt dazu, daß die meisten Knickgleichungen für $p = 0$ zu Identitäten werden. Man kann die Knickwerte trotzdem daraus erhalten, indem man die Knickgleichungen für kleine p entwickelt oder aber, indem man die Rechnungen von Abschnitt 3 nochmals durchführt, jedoch die Lösung (2.24a) verwendet. Setzt man nach (2.22)

$$\varepsilon\,(p=0) = \varepsilon_0 = \frac{\alpha_0}{\beta_0\, l_0^2}, \tag{4.9}$$

so erhält mit beiden Methoden für das kritische Torsionsmoment w_0 bei reiner Torsionsbeanspruchung in den verschiedenen Knickfällen die folgenden Gleichungen

Knickfall I:

$$\operatorname{tg} w_0 = \frac{w_0}{1 + w_0^2\,\varepsilon_0}, \tag{4.10 I}$$

Knickfall II:

$$w_0 = \pm\,\pi, \tag{4.10 II}$$

Knickfall III semitangential:

$$w_0 = \pm\,\frac{\pi}{2}, \tag{4.10 III s}$$

Knickfall III quasitangential:

$$w_0 = \pm\,\frac{\pi}{4}, \tag{4.10 III q}$$

Knickfall III pseudotangential:

$$w_0 - \frac{\tau}{2} = \pm\,\frac{\pi}{4}, \tag{4.10 III p}$$

Knickfall IV semitangential:

$$\operatorname{ctg} w_0 = \frac{1 + w_0^2}{w_0 - 4\,w_0^3\,\varepsilon_0}, \tag{4.10 IV s}$$

Knickfall IV quasitangential:

$$\begin{aligned}
&\sin^2 w_0 - w_0 \sin 2\,w_0 + w_0^2 - w_0^4 \cos 2\,w_0\\
&\quad + \varepsilon_0\,(4\,w_0^3 \sin 2\,w_0 - 8\,w_0^4 + 8\,w_0^5 \sin 2\,w_0) + 16\,\varepsilon_0^2\, w_0^6 \cos 2\,w_0 = 0,
\end{aligned} \tag{4.10 IV q}$$

Knickfall IV pseudotangential:

$$\begin{aligned}
&\sin^2 w_0 - w_0 \sin 2\,w_0 + w_0^2 - w_0^4 \cos 2\,w_0 + \varepsilon_0\,(4\,w_0^3 \sin 2\,w_0 - 8\,w_0^4 + 8\,w_0^5 \sin 2\,w_0)\\
&\quad + 16\,\varepsilon_0^2\, w_0^6 \cos 2\,w_0 + \operatorname{tg}\tau\,(2\,w_0 \sin^2 w_0 - 2\,w_0^2 \sin 2\,w_0 + 2\,w_0^3 - w_0^4 \sin 2\,w_0)\\
&\quad + \varepsilon_0 \operatorname{tg}\tau\,(8\,w_0^3 \sin^2 w_0 - 8\,w_0^5 \cos 2\,w_0) + 16\,\varepsilon_0^2 \operatorname{tg}\tau\, w_0^6 \sin 2\,w_0 = 0,
\end{aligned} \tag{4.10 IV p}$$

Knickfall V semitangential:

$$\operatorname{tg} w_0 = \frac{w_0}{4\, w_0^2\, \varepsilon_0 - 3}\,, \tag{4.10Vs}$$

Knickfall V quasitangential:

erster Faktor $$w_0 = \pm \frac{\pi}{2}\,,$$

zweiter Faktor $$w_0 = \pm \sqrt{\frac{1}{4\,\varepsilon_0}}\,, \tag{4.10Vq}$$

Knickfall V pseudotangential:

erster Faktor $$w_0 - \tau = \pm \frac{\pi}{2}\,,$$

zweiter Faktor $$\operatorname{tg} w_0 = \frac{w_0\,(1 - 4\, w_0^2\, \varepsilon_0)\, \operatorname{tg} \tau}{w_0\,(1 - 4\, w_0^2\, \varepsilon_0) + \operatorname{tg} \tau}\,, \tag{4.10Vp}$$

Um diese Gleichungen bequem diskutieren zu können, führen wir noch die Größe ε_0 nach (4.9) mittels der Beziehungen (2.3) und (4.6) auf den Schlankheitsgrad s zurück. Man findet

$$\varepsilon_0 = \frac{1 - b}{4\, a\, s^2}\,. \tag{4.11}$$

Für kreisförmige Drahtquerschnitte (2.4) sind die Funktionen $w_0(s)$ für semi- und quasitangentiale Momente in Abb. 7 graphisch dargestellt. In den Knickfällen II und III, wo keine Querkräfte und somit keine Schiebungen auftreten, sind die Werte w_0 konstant und stimmen erwartungsgemäß mit den Knickwerten für den schlanken Stab überein. In allen andern Fällen stimmen nur die Grenzwerte für $s = \infty$ mit den Knickmomenten für den schlanken Stab überein, während für endliches s die Knickgrößen w_0 kleiner sind und mit zunehmendem s monoton zunehmen.

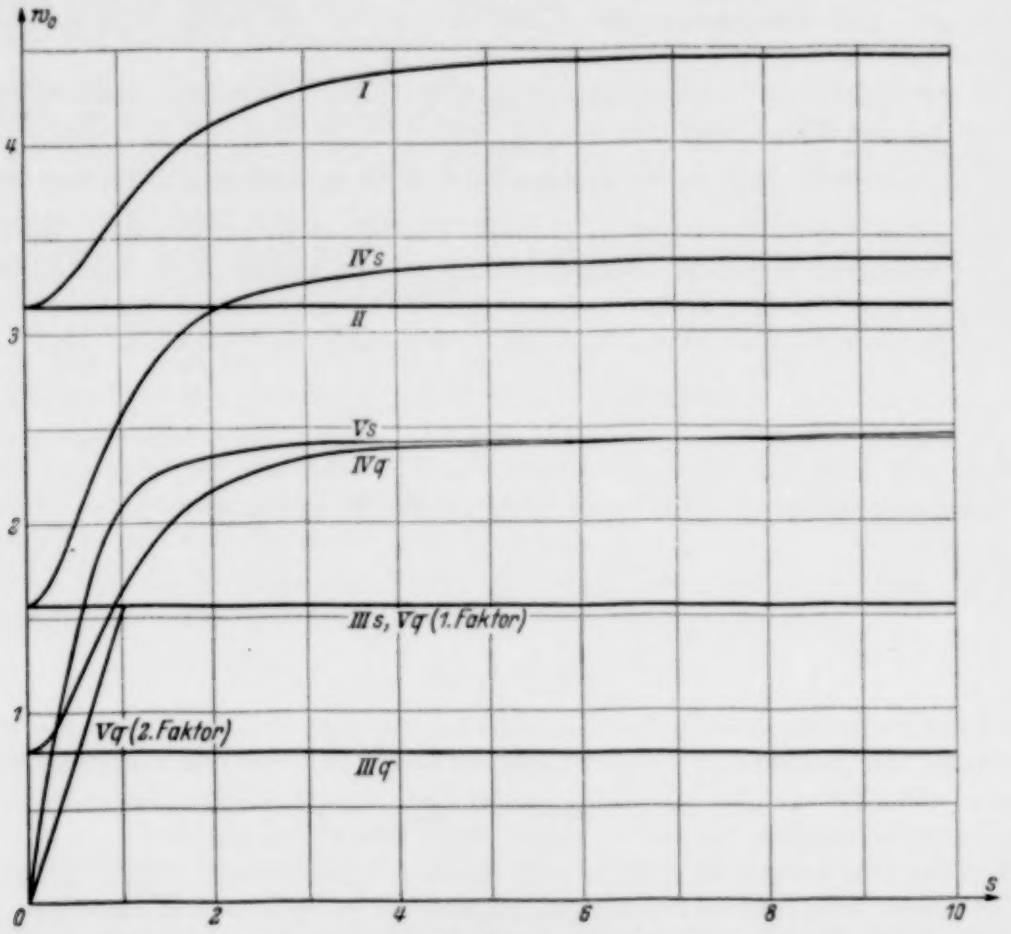


Abb. 7. Die Knickkurven I bis V für reine Torsionsbeanspruchung bei semi- und quasitangentialem Moment.

Dabei ist freilich zu beachten, daß der Proportionalitätsfaktor $l_0/2\,\alpha_0$ zwischen dem eigentlichen Torsionsmoment W_0 und der Größe w_0 selbst mit dem Schlankheitsgrad variieren kann, und zwar ist $l_0/2\,\alpha_0$ nach (2.2) bei festem Drahtquerschnitt zum Wicklungsradius R proportional und unabhängig von l_0. Berücksichtigt man diese Abhängigkeit, so ergibt sich, daß W_0 bei konstantem l_0 in allen Fällen mit zunehmendem R abnimmt, während bei konstantem R in den Fällen II und III

W_0 für alle l_0 fest bleibt, in den andern Fällen aber mit zunehmendem l_0 zunimmt. Ändert man R und l_0 proportional, so bleiben s und w_0 fest, W_0 aber nimmt mit zunehmendem R ab. Durch nichtproportionales Verändern von l_0 und R kann schließlich auch erreicht werden, daß W_0 mit zunehmendem s abnimmt.

Die Werte, zwischen denen w_0 variieren kann, sind in der folgenden Tabelle 2 zusammengestellt. (Dabei ist selbstverständlich auch der Wert $s = 0$ nur ein mathematischer Grenzwert, der sich mechanisch nur näherungsweise realisieren läßt.)

Tabelle 2.

Fall	$w_{0\,min}$ $(s = 0)$	$w_{0\,max}$ $(s = \infty)$	Bestimmungsgleichung für $w_{0\,max}$
I	π	4,494	$\operatorname{tg} w_0 = w_0$
II	π	π	
III s	$\pi/2$	$\pi/2$	
III q	$\pi/4$	$\pi/4$	
IV s	$\pi/2$	3,406	$\operatorname{ctg} w_0 = \dfrac{1 + w_0^2}{w_0}$
IV q	$\pi/4$	2,476	$\sin^2 w_0 - w_0 \sin 2 w_0 + w_0^2 - w_0^4 \cos 2 w_0 = 0$
V s	0	2,456	$\operatorname{tg} w_0 = -\dfrac{w_0}{3}$
V q	0	$\pi/2$	

Besondere Beachtung verdient noch der Fall Vq. Die Knickgleichung zerfällt in zwei Faktoren, die beide berücksichtigt werden müssen. Im Bereich $s \geqq 1{,}036$ wird die Knickkurve durch die Gerade $w_0 = \pi/2$ dargestellt, die schon im Fall IIIs auftrat; für $s \leqq 1{,}036$ fallen die kritischen Werte dann aber mit s linear gegen Null ab. Daraus folgt aus Stetigkeitsgründen, daß auch bei der allgemeinen Druck- und Torsionsbeanspruchung mindestens für kleine Druckkräfte keiner der beiden Faktoren zum vorneherein weggelassen werden darf.

Für Federn mit andern als kreisförmigen Drahtquerschnitten, also mit andern Werten a und b können die Kurven der Abb. 7 auch verwendet werden, wenn man nur die Abszisse s durch den Wert $s\left(\dfrac{23 - 23\,b}{10\,a}\right)^{1/2}$ ersetzt. Man findet damit z. B., daß für in Richtung der Schraubenachse langgestreckte Rechteckprofile (a und b kleiner als beim Kreisquerschnitt, Tabelle 1) die kritische Torsionsgröße w_0 für einen festen Schlankheitsgrad im allgemeinen kleiner ist als beim Kreisquerschnitt.

Komplizierter liegen die Verhältnisse bei den pseudotangentialen Momenten, da zu den durch die Feder bestimmten Parametern a, b und s auch noch das Verhältnis

$$\frac{\alpha_0}{\delta_0} = \frac{2\,I_1}{I_2\left(1 + 2\,k\,\dfrac{m+1}{m}\,\dfrac{I_1}{I_0}\right)} \tag{4.12}$$

hinzutritt, denn gemäß (4.2) und (2.35a und b) gelten die Beziehungen

$$\tau = \omega = \frac{2\,\alpha_0}{\delta_0}\,w_0\,, \tag{4.13a}$$

$$\tau = \frac{\omega}{2} = \frac{\alpha_0}{\delta_0}\,w_0\,, \tag{4.13b}$$

je nachdem, ob die Feder am unteren Ende a) starr eingespannt ist oder b) sich um eine vertikale Achse drehen kann. Im Knickfall V kommt natürlich nur b) in Frage, da dort nach Voraussetzung die Momente an beiden Federenden pseudotangential sind. Ferner müssen immer die Ungleichungen (2.36a und b) beachtet werden, die für w_0 und τ obere Schranken abgeben.

Für die Knickfälle I und II ändern sich die Knickgleichungen nicht, die Ungleichungen (2.36 a und b) ergeben aber mit (2.22) und (2.1), daß für $\alpha_0/\delta_0 \geqq 1/4$ (Fall a) bzw. $\alpha_0/\delta_0 \geqq 1/2$ (Fall b) überhaupt kein Knicken eintritt. Speziell für den Kreisquerschnitt ($\alpha_0/\delta_0 = 0{,}8696$) ist Knicken in beiden Fällen unmöglich.

Abb. 8 zeigt die Abhängigkeit w_0 (α_0/δ_0) für den Knickfall IIIp, die Knickgröße w_0 ist hier unabhängig vom Schlankheitsgrad. Man findet durch Rechnung oder aus der Figur, daß für den Kreisquerschnitt nur im Falle b Knicken möglich ist und zwar bei einem Moment $w_0 = 1{,}390$.

Die Untersuchung der Gleichung (4.10IVp) zeigt, daß im Knickfall IVp gleich wie im Fall IIIp Knicken nur möglich ist für $\alpha_0/\delta_0 < 1/2$ (Fall a), bzw. $\alpha_0/\delta_0 < 1$ (Fall b), aber bei einem bestimmten

Querschnitt auch nur für Schlankheitsgrade $s < s^*(\alpha_0/\delta_0, a, b)$. Dieser größte Schlankheitsgrad s^* wird für $\alpha_0/\delta_0 \leqq 0{,}231$ (Fall a) bzw. $\alpha_0/\delta_0 \leqq 0{,}461$ (Fall b) unabhängig von a und b gleich unendlich, so daß unterhalb dieser Werte Knicken für jeden Schlankheitsgrad möglich ist. Für den Kreisquerschnitt ergibt sich daraus, daß Knicken nur im Falle b möglich ist und zwar nur für $s < s^* = 0{,}3928$ und mit einem Moment $w_0 < 1{,}806$.

Beim Knickfall Vp liegen die Verhältnisse so, daß auch hier Knicken nur für $\alpha_0/\delta_0 < 1$ möglich ist, und zwar liefert für $1/2 \leqq \alpha_0/\delta_0 < 1$ der zweite Faktor allein das Knickmoment. Dabei ist Knicken wieder nur möglich für $s < s^{**}(\alpha_0/\delta_0, a, b)$. (Kreisquerschnitt $s^{**} = 0{,}655$ und $w_0 < 1{,}806$). Wenn $\alpha_0/\delta_0 < 1/2$ ist, so ist der erste Faktor für große und der zweite für kleine Schlankheitsgrade maßgebend, Knicken ist dann immer möglich.

c) Kombinierte Torsions- und Druckbeanspruchung. Um die allgemeinen Knickgleichungen aus Abschnitt 3 für eine bestimmte Feder auszuwerten, hat man die Federgrößen a, b, s (bei pseudotangentialen Momenten auch α_0/δ_0) in die Knickgleichungen einzuführen und für variables ξ die entsprechenden w-Werte zu berechnen. Da die Knickgleichungen außer in den Fällen II und IIIs transzendent sind, ist diese Arbeit bei den komplizierteren Gleichungen allerdings ziemlich mühsam. In manchen Fällen kann man die Rechnungen durch Einführen eines geeigneten Parameters stark vereinfachen; diese Fälle werden im folgenden genauer untersucht.

Dabei wird zunächst nur die Abhängigkeit der kritischen Dynamen vom Schlankheitsgrad untersucht und graphisch dargestellt; die Abb. 9, 10, 11, 12 und 13 beziehen sich alle auf Federn mit kreisförmigem Drahtquerschnitt (2.4). Die Abhängigkeit von der Querschnittsform wird in Abschnitt 4d diskutiert werden.

Ferner sind die Knickkurven nur für das praktisch allein wichtige Intervall $0 \leqq \xi < 1$ gezeichnet. Selbstverständlich können aber, falls nötig, mit den Knickgleichungen auch die Knickkurven für $\xi < 0$, also für Federn unter Zug und Torsion berechnet werden.

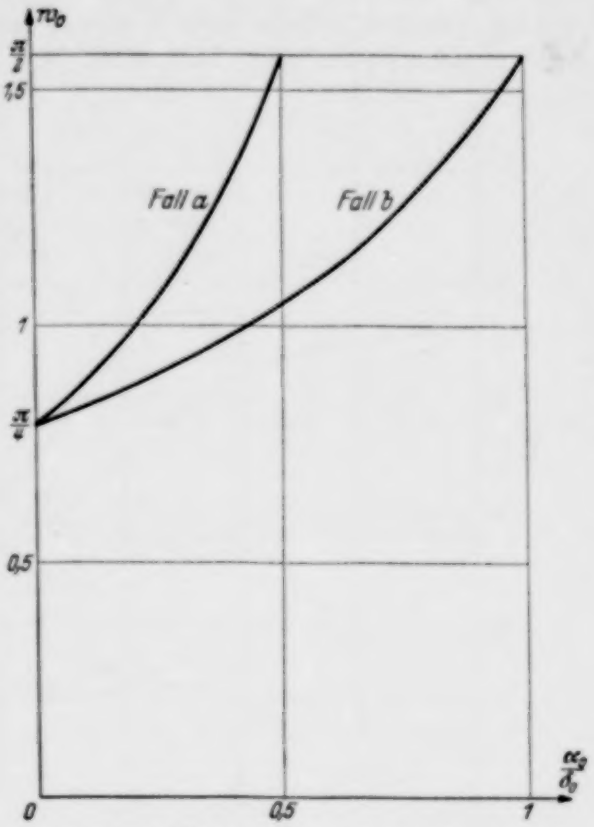


Abb. 8. Die Knickkurven für reine pseudotangentiale Torsionsbeanspruchung im Knickfall III.

Haringx[1] hat gezeigt, daß sich auch der Bereich $\xi \geqq 1$ realisieren läßt, indem man die Feder umstülpt, d.h. den ersten Ring festhält, den zweiten unter leichter Deformation über den ersten zieht, dann den dritten über die ersten beiden usw. *Haringx* zeigte für reine Druckbeanspruchung, daß die Knickgleichungen mindestens qualitativ die tatsächlichen Verhältnisse auch hier richtig wiedergeben; und auch wir könnten für kombinierte Druck- und Torsionsbeanspruchung die Knickkurven ohne weiteres in diesen Bereich $\xi \geqq 1$ fortsetzen.

Knickfall I. Um die Knickkurven Punkt für Punkt auszuwerten, wählen wir die Größe q (2.27) als Parameter. Die Knickgleichung (I) lautet dann nach p aufgelöst

$$p = \frac{2\,q\,(\cos w - \cos q)}{\sin q}\,, \tag{4.14}$$

und aus (2.27) ergibt sich

$$p\,(1 + \varepsilon\,p) = q^2 - w^2\,. \tag{4.15}$$

Dividiert man diese beiden letzten Gleichungen durcheinander, so kommt man auf

$$1 + \varepsilon\,p = \frac{(q^2 - w^2)\sin q}{2\,q\,(\cos w - \cos q)}\,, \tag{4.16}$$

während nach (4.7)

$$1 + \varepsilon\,p = \frac{1 - b\,\xi}{1 - \xi} \tag{4.17}$$

[1] *J. A. Haringx*, Appl. Sci. Res. A 1, (1949), S. 417.

ist. Mit (4.16) und (4.17) berechnet man leicht ξ in Funktion von w und q und daraus läßt sich mit (4.7) und (4.14) auch der Schlankheitsgrad

$$s = \sqrt{\frac{p}{4\,a\,(1-\xi)\,\xi}} \tag{4.18}$$

in Funktion von w und q darstellen. Variiert man jetzt q bei festem w, so erhält man die Knickkurven in einem (s, ξ)-Diagramm mit w als Scharparameter, wie sie Abb. 9 — die der Arbeit von *Haringx*[1] entnommen ist — für Kreisdrahtquerschnitt (2.4) zeigt.

An Stelle von w kann gemäß (4.2) auch der — in der Abb. 9 auch angegebene — totale Verdrehungswinkel ω als Scharparameter verwendet werden. Die Kurven sind so ausgewählt, daß nicht w, sondern ω besondere Werte annimmt; speziell erhält man in allen Knickfällen für $w = \omega = 0$ die Knickkurve für reine Drucklast (4.8).

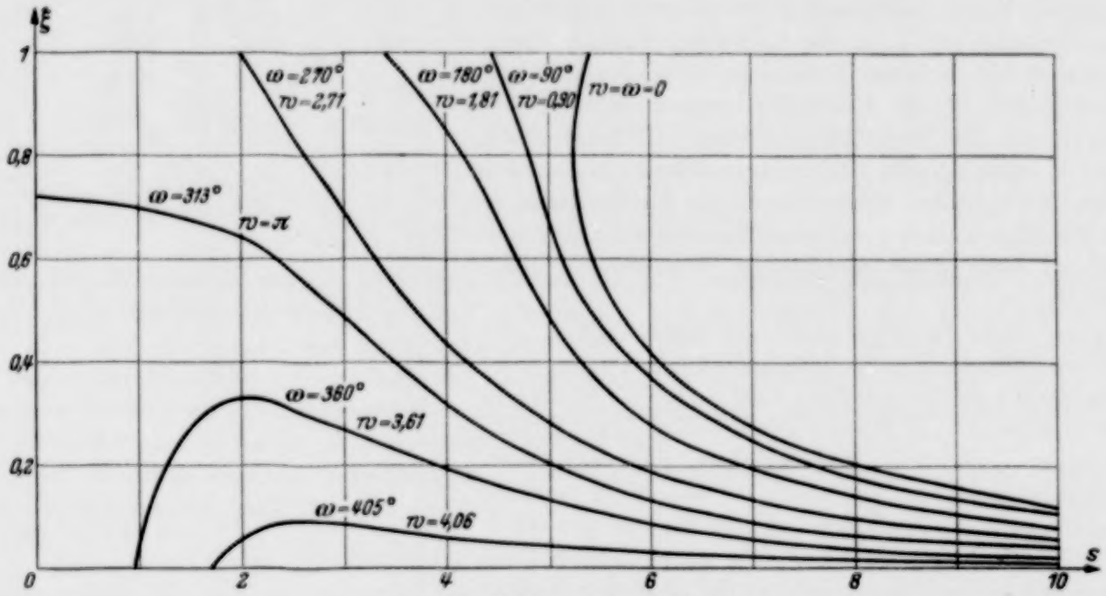


Abb. 9. Die Knickkurven im Knickfall I.

Die Knickkurven zerfallen in zwei verschiedene Typen, die analog auch in den andern Knickfällen auftreten und mit Kurven erster und zweiter Art bezeichnet werden sollen; je nachdem, ob w unterhalb oder zwischen den für reine Torsionsbeanspruchung möglichen Grenzknickmomenten $w_{0\,min}$ und $w_{0\,max}$ (Tabelle 2) liegt. Die beiden Scharen werden getrennt durch die Kurve $w = w_{0\,min} = \pi$, die selbst keiner Schar angehört, sondern als einzige Kurve die ξ-Achse in einem endlichen Punkte schneidet. (Für $w > w_{0\,max}$ würden noch Kurven einer dritten Art auftreten, die aber in allen Abbildungen wegfallen, weil sie vollständig unterhalb der s-Achse verlaufen, in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß eine solche Feder nur durch Zug stabilisiert werden kann.) Für w zwischen $w_{0\,min} = \pi$ und $w_{0\,max} = 4{,}494$ besitzen die Knickkurven (zweiter Art) ein Maximum, es existiert für jedes solches w ein bestimmter Schlankheitsgrad mit maximaler kritischer negativer Federdehnung, für wachsendes s strebt ξ gegen Null, für abnehmendes gegen $-\infty$. Liegt w unterhalb π, (Kurven erster Art), so fallen die Knickkurven im allgemeinen monoton. (Dies gilt allerdings nur für $\xi < 1$.) Da sie die ξ-Achse nie schneiden, gibt es zu jedem solchen Torsionsmoment einen Schlankheitsgrad, unterhalb dessen die Feder für jede Druckkraft knickfest ist. Die Eindeutigkeit der Funktionen $\xi(s)$ ist für $\xi < 1$ nur gestört bei sehr kleinen Torsionsmomenten und s in der unmittelbaren Umgebung von 5,38, wo es zu jedem s-Wert zwei oder drei ξ-Werte gibt. Vergrößert man für festes s den zweiten ξ-Wert etwas, so nehmen auch die w zu, d. h. eine knickende Feder kann in diesem kleinen Bereich — und nur hier — bei fester Druckkraft durch Vergrößern des Torsionsmomentes und bei festem Torsionsmoment durch Vergrößern der Druckkraft wieder stabilisiert werden. Der Bereich ist allerdings so klein, daß sich dieses Verhalten für Kreisquerschnitte kaum feststellen lassen dürfte (Vgl. Abschnitt 4d).

Knickfall II. Die Tatsache, daß für eine Feder mit beidseitig gelenkig gelagerten Enden und einer aus Druck und axialer Torsion zusammengesetzten Belastung das — allerdings nicht legitime

[1] Fußnote 5 von Seite 113.

— statische Stabilitätskriterium auf die Knickgleichung II führt, hatte zur Folge, daß diese Knickgleichung schon früher eingehend diskutiert worden ist. So findet man das Knickdiagramm Abb. 10 auch bei *Haringx*, während bei *Ziegler* und *Huber*[1] oder *Biezeno* und *Grammel*[2] die Diskussion auch für gewisse Rechtecksquerschnitte durchgeführt ist. Es ist dort nur zu beachten, daß die Knickkurven in einem (ξ, η)-Koordinatensystem dargestellt sind, wobei ξ wie hier (4.3) und η als $\eta = w/w_0 = w/\pi$ definiert ist und als Scharparameter der Schlankheitsgrad s verwendet wird, der dort aber als $l_0/2\,\pi\,R$ und nicht wie hier und bei *Haringx* als $l_0/2\,R$ definiert ist.

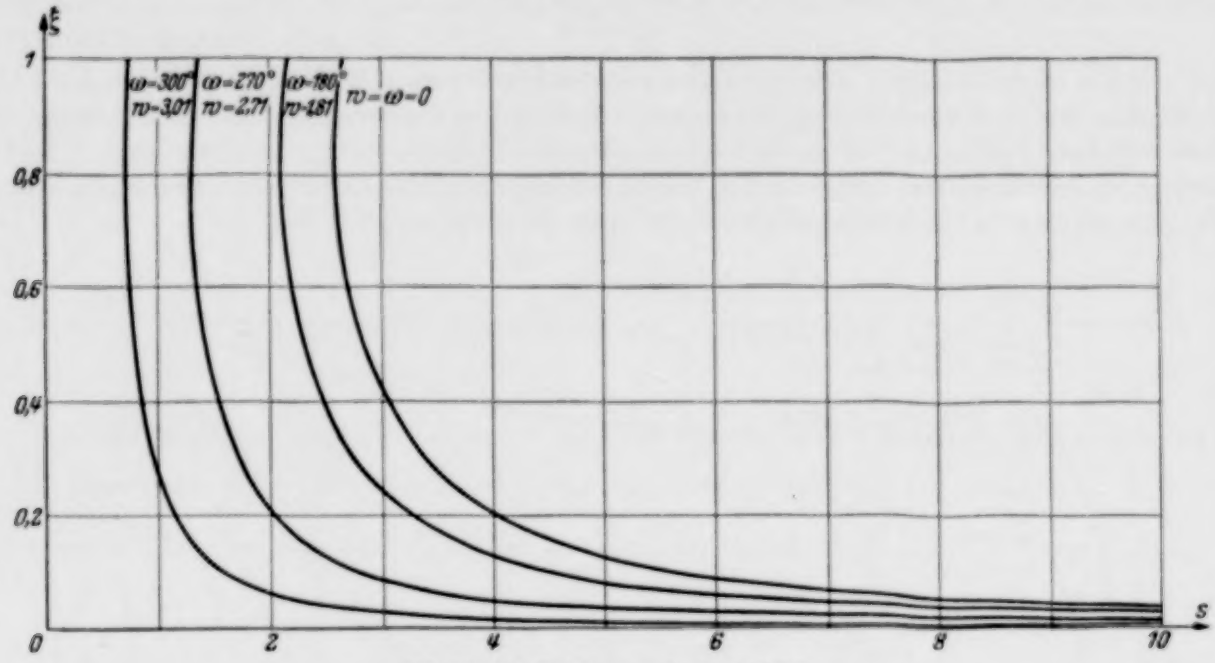


Abb. 10. Die Knickkurven im Knickfall II.

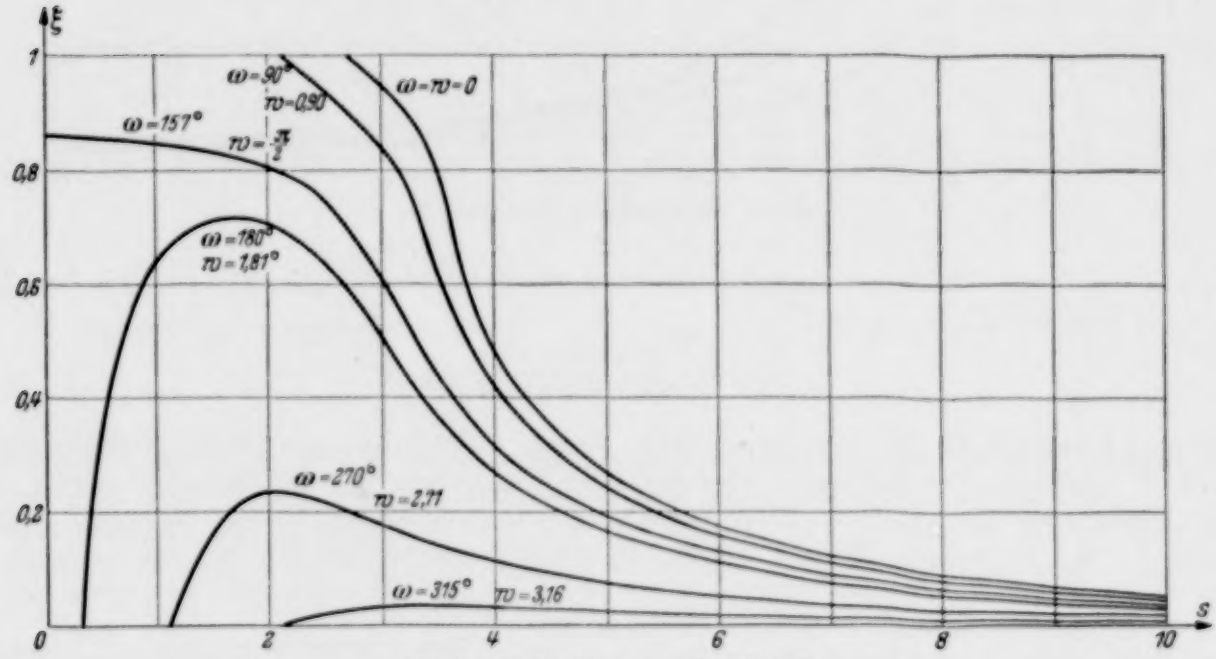


Abb. 11. Die Knickkurven im Knickfall IVs.

Die in der Abb. 10 gezeichneten Kurven sind alle zueinander affin; es handelt sich um die Kurven erster Art, während die Kurven zweiter Art hier gar nicht auftreten, da im Falle II $w_{0\,min} = w_{0\,max}$ ist. Im Gegensatz zum Falle I besteht die Möglichkeit, die Feder durch Erhöhung des Torsionsmomentes zu stabilisieren für alle $s < 2{,}69$ und die zugehörigen Torsionsmomente umfassen alle Werte $w < \pi$.

Knickfall IIIs. Der Fall IIIs erfordert kein eigenes Knickdiagramm, da sich die Knickgleichung (IIIs) durch die Substitution $w_{\mathrm{III_s}} = 1/2\,w_{\mathrm{II}}$, $s_{\mathrm{III_s}} = 1/2\,s_{\mathrm{II}}$ auf die Knickgleichung (II)

[1] *H. Ziegler* u. *A. Huber*, Z. angew. Math. Phys. 1 (1950) S. 189.
[2] Fußnote 1 von Seite 114.

zurückführen läßt. Man hat in der Abb. 10 nur die Abszisse und den Scharparameter gemäß obiger Substitution zu verändern; das Verhalten der Feder ist analog zum Verhalten im Fall II.

Knickfall IVs. Wie im Falle I folgt aus der Knickgleichung (IVs)

$$p = \frac{(w^2 + q^2)\sin q - 2\,w\,q\sin w}{q\cos q}$$

mit (4.15) und (4.17)

$$\frac{1 - b\,\xi}{1 - \xi} = \frac{(q^2 - w^2)\,q\cos q}{(w^2 + q^2)\sin q - 2\,w\,q\sin w},$$

woraus sich ξ und mit (4.18) s durch w und q ausdrücken lassen. Die Knickkurven in Abb. 11 verlaufen ähnlich wie im Falle I; es sind beide Arten vorhanden, die durch die Kurve $w = w_{0\,min} = \pi/2$ getrennt werden. Im Gegensatz zu Fall I sind aber die Funktionen $\xi(s)$ im Bereich $\xi < 1$ für alle s eindeutig, so daß in diesem Knickfall die Vergrößerung der kritischen Druckkraft durch Erhöhung des Torsionsmomentes für Kreisdrahtfedern überhaupt nicht möglich ist.

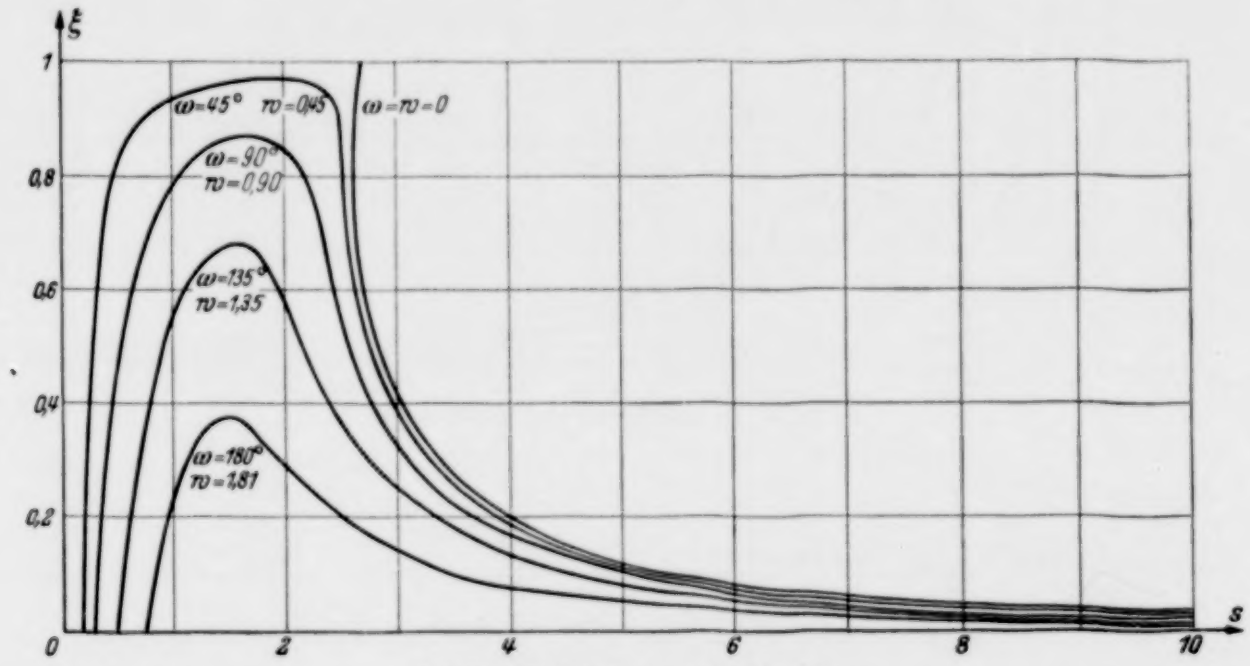


Abb. 12. Die Knickkurven im Knickfall Vs.

Knickfall Vs-s. Gleich wie bisher erhält man aus der Knickgleichung (Vs-s) mit dem Parameter q die Beziehung

$$\frac{1 - b\,\xi}{1 - \xi} = \frac{(q^2 - w^2)\,q\sin q}{2\,w^2(\cos w - \cos q)},$$

woraus man ξ und mit (4.18) s berechnet. Da in diesem Knickfall $w_{0\,min} = 0$ ist, sind alle Kurven der Abb. 12 (außer $w = 0$) Kurven zweiter Art. Die Funktionen $\xi(s)$ sind überall eindeutig, außer für sehr kleine w und für s in der unmittelbaren Umgebung von 2,65, wo es wie im Falle I zu jedem s zwei oder drei ξ-Werte gibt. Wieder würde sich hier und nur hier die Druckstabilität durch Vergrößerung des Torsionsmomentes erhöhen lassen; doch ist auch hier das Gebiet so klein, daß sich diese Tatsache praktisch kaum feststellen lassen dürfte.

Knickfall IIIq. Unter Verwendung des Parameters q läßt sich die Knickgleichung (IIIq) als

$$w = \pm\, q\,\mathrm{ctg}\,q$$

schreiben, während mit (4.15)

$$p\,(1 + \varepsilon\,p) = q^2\,(1 - \mathrm{ctg}^2\,q)$$

wird. Mit Hilfe der zweiten Bedingung (4.7) lassen sich aus diesen beiden Gleichungen für festes s zu jedem q die Größen w und ξ berechnen. Dieser Fall muß daher anders als die bisherigen dargestellt werden, es lassen sich die Knickkurven nur in einem (ξ, w)-Koordinatensystem mit s als Scharparameter angeben. Abb. 13 zeigt diese Knickkurven für Kreisdrahtfedern. Selbstverständlich sind die Knickkurven symmetrisch in bezug auf die ξ-Achse, da es wie in allen andern Knickfällen auf das Vorzeichen von w nicht ankommt. Zu jedem Torsionsmoment $w < \pi/4$ gibt es auch hier einen Schlankheitsgrad, unterhalb dessen die Feder für jede Druckkraft knickfest ist. Im Be-

reich $0{,}8125 > \xi$ fallen die Knickkurven monoton, während sie, falls überhaupt vorhanden, im Bereich $\xi > 0{,}8125$ wieder ansteigen. In diesem Gebiet ist also wieder Stabilisierung durch Erhöhung des Torsionsmomentes möglich und zwar nur für Schlankheitsgrade $s < 1{,}346$.

Vergleicht man schließlich die verschiedenen untersuchten Knickfälle noch miteinander, so stellt man fest, daß der Satz sich auch hier bestätigt, wonach eine Vermehrung der Bindungen eine Erhöhung der kritischen Belastung bewirkt. So schneiden sich z. B. entsprechende Kurven der Fälle I und II oder Vs-s und IVs nicht, dagegen dürfen verschiedenartige Bindungen nicht miteinander verglichen werden, wie z. B. die Schnittpunkte der beiden Kurven $w = 1{,}81$ in den Knickfällen II und IVs zeigen.

d) Andere Drahtquerschnitte. Um die Abhängigkeit der kritischen Lasten der Feder von der Querschnittsform zu diskutieren, kann man die Querschnittsparameter a und b in den Formeln (4.7) beim Berechnen der Punkte der Knickkurven durch andere Werte als (2.4) ersetzen und die neuen Knickkurven wieder in einem (s, ξ)-Koordinatensystem darstellen. Einfacher ist es jedoch,

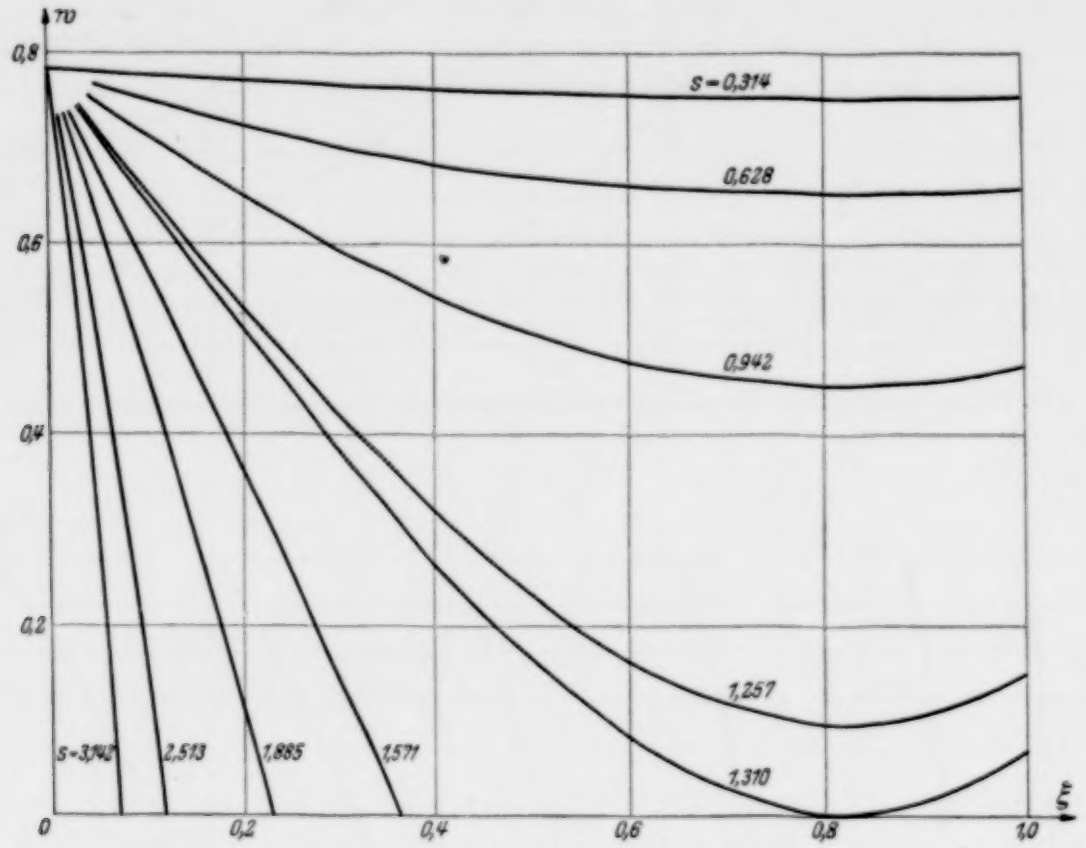


Abb. 13. Die Knickkurven im Knickfall IIIq.

die alten Knickkurven für den Kreisquerschnitt beizubehalten und dafür ein krummliniges Koordinatennetz zu verwenden. Die Tatsache, daß in den Knickgleichungen nur p und $p(1 + \varepsilon p)$, nicht aber w von a und b abhängen, bewirkt, daß die Knickgleichungen erfüllt bleiben, solange nur diese beiden Ausdrücke ihren Wert nicht ändern. Bezeichnet man die den Kreisquerschnittsgrößen $a = 23/26$, $b = 8/13$, s und ξ beim neuen Profil entsprechenden Größen mit $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{s}$ und $\bar{\xi}$, so hat man gemäß (4.7) nur zu verlangen, daß

$$p = 4\, a\, s^2 (1 - \xi)\, \xi = 4\, \bar{a}\, \bar{s}^2 (1 - \bar{\xi})\, \bar{\xi}$$

und

$$p(1 + \varepsilon p) = 4\, a\, s^2 (1 - b\, \xi)\, \xi = 4\, \bar{a}\, \bar{s}^2 (1 - \bar{b}\, \bar{\xi})\, \bar{\xi}$$

ist. Daraus folgen durch Auflösen nach $\bar{s}$ und $\bar{\xi}$ die Beziehungen

$$\bar{\xi} = \frac{(1 - b)\, \xi}{(\bar{b} - b)\, \xi + 1 - \bar{b}}, \qquad \bar{s}^2 = s^2\, \frac{a\, [(\bar{b} - b)\, \xi + 1 - \bar{b}]^2}{\bar{a}\, (1 - b)\, (1 - \bar{b})}. \tag{4.19}$$

Um die Knickwerte des neuen Profils zu bekommen, hat man jetzt nur das Kurvennetz $\bar{s} =$ konstant und $\bar{\xi} =$ konstant im (s, ξ)-Koordinatensystem über die alten Knickkurven zu legen und die

neuen Werte $\bar{s}$ und $\bar{\xi}$ aus diesem Netz abzulesen. Der Scharparameter w bleibt dabei unverändert, dagegen muß der totale Verdrehungswinkel ω mit (4.2) für jede Kurve aus w neu berechnet werden, weil die Größe $2\,\alpha_0/\delta_0$ nach (2.2) von der Querschnittsform abhängig ist. Natürlich können mit dieser Methode nur die Fälle behandelt werden, bei denen die Knickkurven schon in einem (s, ξ)-Koordinatensystem vorliegen, also z. B. nicht der Fall IIIq.

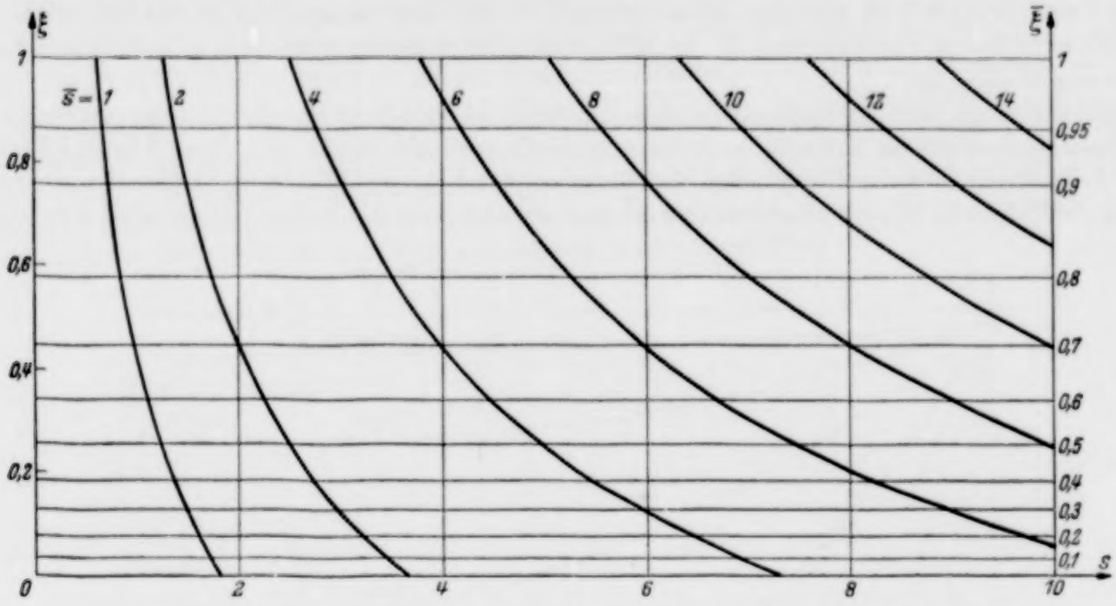


Abb. 14. Das Koordinatennetz für einen rechteckigen Drahtquerschnitt mit dem Seitenverhältnis $\mu = 1/2$.

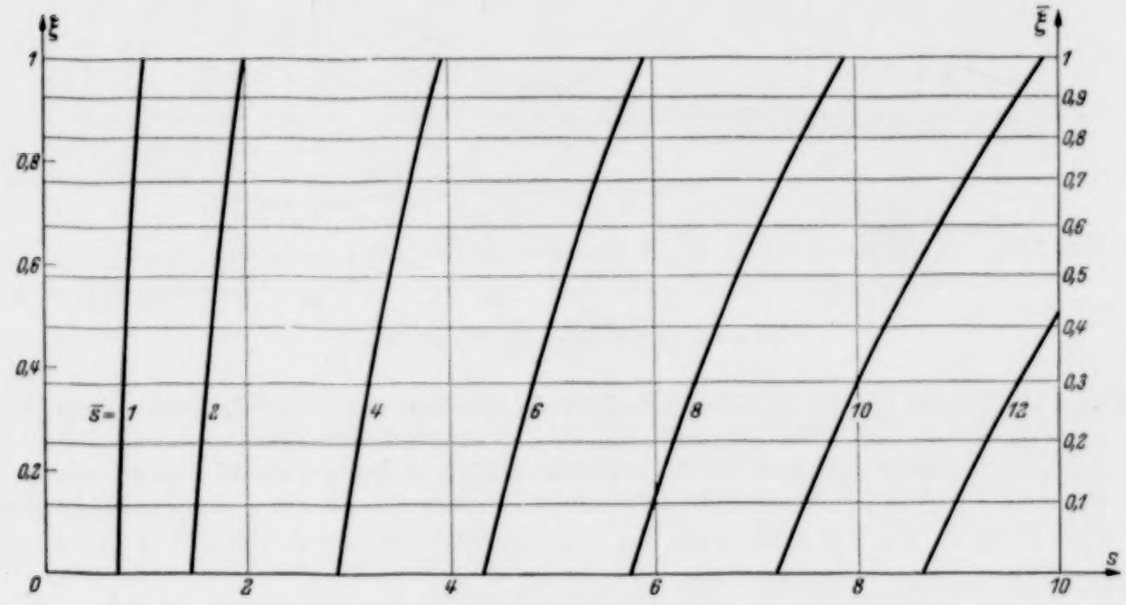


Abb. 15. Das Koordinatennetz für einen rechteckigen Drahtquerschnitt mit dem Seitenverhältnis $\mu = 2$.

Abb. 14 bzw. 15 zeigen diese Koordinatennetze für Rechteckprofile mit den Seitenverhältnissen $\mu = 1/2$, bzw. $\mu = 2$, für die man $\bar{a}$ und $\bar{b}$ der Tabelle 1 entnehmen kann. Die Kurven $\bar{\xi} =$ konstant sind immer zur s-Achse parallele Geraden, die zwar nicht aequidistant sind, aber das interessante Intervall $0 < \xi < 1$ als Ganzes nicht verändern. Die Kurven $\bar{s} =$ konstant sind alle zueinander affin und in bezug auf die ξ-Achse fallend, bzw. steigend, je nachdem $\bar{b} > 8/13$ oder $\bar{b} < 8/13$ ist.

Denkt man sich nun diese Netze in Abb. 9 bis 12 eingetragen, so erkennt man, daß zwar die einzelnen Knickwerte numerisch stark mit der Querschnittsform variieren können, daß sich aber am ganzen Diagramm qualitativ nur wenig ändert. So zerfallen die Knickkurven weiterhin in die zwei Typen, die beide ihre charakteristischen Eigenschaften beibehalten.

Die Größe des Bereichs, in dem eine Erhöhung des Torsionsmomentes auch eine Vergrößerung der kritischen Druckkraft bewirkt, hängt allerdings stark von der Querschnittsform ab. Untersucht man den Bereich, wo die Kurven $\bar{s}$ = konstant die Knickkurven in mehr als einem Punkte schneiden, so stellt man für alle im (s, ξ)-Koordinatensystem dargestellten Knickfälle fest, daß dieser Bereich für $\mu = 2$ (Abb. 15) ganz verschwunden ist, daß er aber für $\mu = 1/2$ (Abb. 14) gegenüber dem Kreisprofil sich stark vergrößert hat, (ja im Knickfall IVs überhaupt erst auftritt), so daß er für ein solches Rechteckprofil auch praktisch eine Rolle spielen dürfte.

Allgemein ergibt sich daraus, daß in allen diskutierten Knickfällen bei einem in Richtung der Schraubenachse genügend langgestreckten Rechtecksprofil eine Erhöhung des Torsionsmomentes immer eine Verminderung der kritischen Druckkraft bewirkt und umgekehrt, während bei Federn mit hochkant gewickeltem Rechtecksprofil immer ein Bereich für den Schlankheitsgrad existiert, wo eine Erhöhung der Druckkraft eine Erhöhung des kritischen Torsionsmomentes und umgekehrt nach sich zieht.

(Eingegangen am 26. Juni 1956)

Anschrift des Verfassers: *H. Maag*, dipl. Math. ETH. Bern (Schweiz), Simonstr. 25

Ein Sonderfall des senkrechten Profilgitters bei beliebigen instationären Bewegungen

Von K. Nickel

1. Einleitung. In einer kürzlich hier erschienenen Arbeit[1] wurde u. a. das senkrechte Flügelgitter (Abb. 1) bei instationären Bewegungen behandelt. Das strömende Medium war als volumenbeständig und reibungsfrei angenommen, die Strömung sollte in der Ebene erfolgen, ihr instationäres Verhalten war an allen Gitterschaufeln synchron und durch kleine Störungen hervorgerufen. Unter diesen Voraussetzungen ließ sich das Problem auf die Lösung von zwei Integralgleichungen zurückführen. Die erste, eine *Fredholm*sche Integralgleichung erster Art, beschreibt analog zur „*Birnbaum*schen Integralgleichung“[2] für das Einzelprofil den stationären Anteil der Strömung und konnte vor einiger Zeit gelöst werden[3]. Die instationäre Komponente der Strömung, die sich physikalisch in der abschwimmenden „Wirbelschleppe“ (Abb. 1) bemerkbar macht, gehorcht mathematisch einer *Volterra*schen Integralgleichung erster Art entsprechend zur „*Wagner*schen Integralgleichung“[4] des Einzelprofils. Die Lösung dieser Integralgleichung wurde vor kurzem für harmonische Schwingungen von *Ch.-Ch. Chang* und *W. H. Chu*[5] angegeben; ferner vergleiche man dazu *H. Söhngen*[6]. Danach läßt sich der lösende Kern der *Wagner*schen Integralgleichung in diesem Fall aus der hypergeometrischen Funktion und der Gammafunktion aufbauen und geht beim Übergang zum Einzelprofil ($t \to \infty$) in den entsprechenden Ausdruck aus *Hankel*funktionen (siehe *H. G. Küßner*[7] und *H. Söhngen*[8]) über. Der allgemeine Fall der beliebigen Bewegungen läßt sich daraus als Fourierintegral gewinnen.

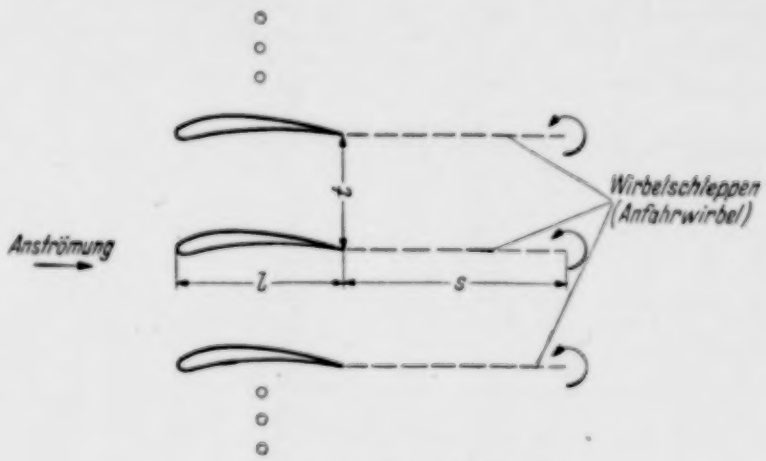


Abb. 1. Senkrechtes Profilgitter.

In der folgenden Note soll gezeigt werden, daß sich die mathematische Lösung des betrachteten Problems erheblich vereinfacht, wenn man zu dem Sonderfall unendlich tiefer Gitterschaufeln ($l \to \infty$) übergeht (Abb. 2), bei dem also die Profilvorderkanten in Anströmrichtung ins Unendliche gerückt sind. Man kommt auf diesen Fall, wenn man bei einem „nichtentarteten“ Gitter (l endlich) gemäß Abb. 1 die Betrachtung auf eine kleine Umgebung der Hinterkante beschränkt, wobei außerdem noch die instationäre Bewegung erst kurze Zeit andauert ($s \ll l$ in Abb. 1). Dieser Grenzübergang $l \to \infty$ bei fester Gitterteilung t bedeutet rein geometrisch dasselbe wie der *Söhngen*sche[9] Grenzübergang $t \to 0$ bei konstanter Profiltiefe l. *Söhngens* Betrachtungsweise hat den Vorzug, daß er bei der Übertragung seiner Rechnungen auf endliche Werte des Teilungsverhältnisses t/l nicht wie hier nur auf den ersten Augenblick der instationären Bewegung angewiesen ist, und daher seine Rechnungen z. B. für Gitterschwingungen nutzbar machen kann. Als Nachteil muß dafür der Näherungscharakter der Lösungen in Kauf genommen werden. Im Gegensatz dazu sind die vorliegenden Untersuchungen dem Bewegungsbeginn angepaßt. Damit bleibt zwar die Anwendung auf das Gitter der Abb. 1 nur auf kleine Zeitintervalle beschränkt, jedoch werden sich dafür geschlossene Formeln aus elementaren Funktionen ergeben, so daß es sich doch lohnt, auch diesen Sonderfall zu beleuchten.

---

[1] *K. Nickel*, Ing.-Archiv. 23 (1955) S. 179.
[2] *W. Birnbaum*, Z. angew. Math. Mech. 3 (1923) S. 290.
[3] *J. Dörr*, Ing.-Arch. 19 (1951), S. 66 und *K. Nickel*, Z. angew. Math. Mech. 31 (1951) S. 285.
[4] *H. Wagner*, Z. angew. Math. Mech. 5 (1925) S. 17.
[5] *Ch.-Ch. Chang* u. *W. H. Chu*, Journ. Appl. Mech. 22 (1955) S. 503.
[6] *H. Söhngen*, Z. angew. Math. Mech. 35 (1955) S. 81.
[7] *H. G. Küßner*, Luftfahrtforschung 17 (1940) S. 355.
[8] *H. Söhngen*, Luftfahrtforschung 17 (1940) S. 401.
[9] *H. Söhngen*, Z. angew. Math. Phys. 4 (1953) S. 267; vgl. auch Fußnote [6].

2. Mathematische Formulierung des Problems. In Abb. 2 ist das Koordinatensystem so gelegt worden, daß die x-Achse in Verlängerung eines Gitterprofils liegt, mit dem Nullpunkt in der Schaufelhinterkante. Da das Gitter der Abb. 2 keine bevorzugte Länge mehr besitzt, kann die Teilung t beliebig gesetzt werden, es genügt also, etwa die beiden Fälle $t = 2\pi$ (Profilgitter) und $t \to \infty$ (Einzelprofil) zu betrachten. Der andere mögliche Grenzfall $t \to 0$ besitzt kaum praktisches Interesse und soll daher im folgenden nicht weiter verfolgt werden. Die Strecke s ist ein Maß für die Zeit, die seit dem Beginn der instationären Bewegung verstrichen ist. Die Normalkomponente $w(x, s)$ der Strömungsgeschwindigkeit an einem Flügelpunkt auf der Strecke $-\infty < x \leqq 0$ bestimmt sich aus der Forderung, daß der Flügel nicht durchströmt werden darf, und kann daher im folgenden als bekannt angesehen werden. Ersetzt man, wie in Abb. 2 angedeutet, die Gitterprofile durch gebundene Wirbel der Stärke $\Gamma(x, s)$ auf der negativen x-Achse und entsprechend die Wirbelschleppen durch freie Wirbel der Stärke $\varepsilon(x, s)$ auf der positiven x-Achse[1], so bestimmen sich die beiden Funktionen $\Gamma(x, s)$ und $\varepsilon(x, s)$ aus der Gleichung

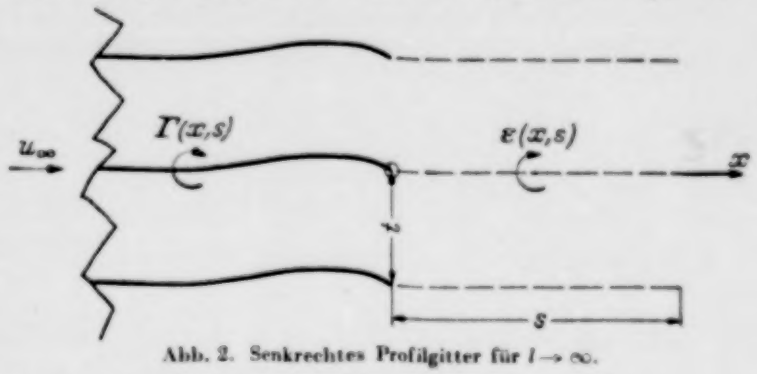


Abb. 2. Senkrechtes Profilgitter für $t \to \infty$.

$$w(x, s) = \frac{1}{2\pi} \oint_{-\infty}^{0} \frac{\Gamma(\xi, s)}{x - \xi}\, d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{s} \frac{\varepsilon(\xi, s)}{x - \xi}\, d\xi \quad \text{für} \quad t \to \infty \tag{1a}$$

bzw.

$$w(x, s) = \frac{1}{4\pi} \oint_{-\infty}^{0} \Gamma(\xi, s) \operatorname{Ctg} \frac{x - \xi}{2}\, d\xi + \frac{1}{4\pi} \int_{0}^{s} \varepsilon(\xi, s) \operatorname{Ctg} \frac{x - \zeta}{2}\, d\xi \quad \text{für} \quad t = 2\pi\,. \tag{1b}$$

Weiter sind noch die folgenden Relationen zu beachten[2]:

$$\int_{-\infty}^{0} \Gamma(\xi, s)\, d\xi + \int_{0}^{s} \varepsilon(\xi, s)\, d\xi = 0\,, \tag{2}$$

$$\Gamma(0, s) = \varepsilon(0, s)\,, \tag{3}$$

$$\varepsilon(x, s) = \varepsilon(0, s - x) \qquad (x > 0)\,. \tag{4}$$

Schließlich werde noch durch

$$\gamma(x, s) = \Gamma(x, s) + \frac{\partial}{\partial s} \int_{-\infty}^{x} \Gamma(\xi, s)\, d\xi \qquad (x \leqq 0) \tag{5}$$

die örtliche Auftriebsverteilung $\gamma(x, s)$ am Profil eingeführt.

Berechnet man analog wie beim endlichen Gitter[2] Γ aus den Gleichungen (1) bis (4) und setzt in (5) ein, so findet man die Auftriebsverteilung über die Flügeltiefe

$$\gamma(x, s) = \frac{2}{\pi} \sqrt{-x} \oint_{-\infty}^{0} \frac{H(\xi, s)}{(\xi - x)\sqrt{-\xi}}\, d\xi \quad \text{für} \quad t \to \infty\,, \tag{6a}$$

$$\gamma(x, s) = \frac{1}{\pi} \sqrt{1 - e^{x}} \oint_{-\infty}^{0} \frac{H(\xi, s)}{\operatorname{Sin} \frac{\xi - x}{2} \sqrt{1 - e^{\xi}}}\, d\xi \quad \text{für} \quad t = 2\pi \tag{6b}$$

mit der Abkürzung

$$H(x, s) = w(x, s) + \frac{\partial}{\partial s} \int_{-\infty}^{x} w(\xi, s)\, d\xi\,. \tag{7}$$

Die Formeln (6) haben sich gegenüber den entsprechenden Gleichungen des Gitters aus endlich langen Schaufeln[3] sehr vereinfacht, insbesondere kommt in (6) die Stärke $\varepsilon(\xi, s)$ der freien Wirbel

[1] Die genaueren Voraussetzungen dieser Setzung sind in der o. a. Arbeit (Fußnote[1] von Seite 134) angegeben.
[2] Vgl. Fußnote [1] von Seite 134.
[3] Vgl. Fußnote [1] von Seite 134, Formel (28).

gar nicht mehr vor. Dieser merkwürdige Sachverhalt bedeutet physikalisch, daß die örtliche Auftriebsverteilung am Gitterprofil bei dem betrachteten speziellen Schaufelgitter nur vom augenblicklichen instationären Bewegungszustand abhängt, nicht aber von der Vorgeschichte der Bewegung, wie sie sich in den abschwimmenden Anfahrwirbeln ausdrückt. Die Formeln für die Auftriebsverteilung tragen also quasistationären Charakter, nur ist gut zu beachten, daß das im stationären Fall allein auftretende Glied $w(x)$ hier nicht nur durch $w(x, s)$, sondern durch $H(x, s)$ nach (7) zu ersetzen ist.

Für den Auftrieb eines Schaufelstücks $a \leqq x \leqq 0$ ergeben sich die geschlossenen Formeln (ϱ = Dichte des strömenden Mediums, u_∞ = Anblasgeschwindigkeit)

$$A \equiv \varrho\, u_\infty \int_a^0 \gamma(x, s)\, dx = \frac{4}{\pi}\, \varrho\, u_\infty \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{0} H(x, s) \left[\sqrt{\frac{a}{x}} - \log \frac{\sqrt{-x} + \sqrt{-a}}{\sqrt{|x - a|}} \right] dx & \text{für } t \to \infty, \quad (8a) \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{0} H(x, s) \left[\frac{\operatorname{arctg} \sqrt{e^{-a} - 1}}{\sqrt{e^{-x} - 1}} - \log \frac{\sqrt{e^{-x} - 1} + \sqrt{e^{-a} - 1}}{\sqrt{|e^{-x} - e^{-a}|}} \right] dx & \\ & \text{für } t = 2\pi. \quad (8b) \end{cases}$$

Im Falle des Einzelprofils ($t \to \infty$) führt auch die Berechnung des Moments dieses Schaufelstücks um einen beliebigen Drehpunkt b (linksdrehend positiv) noch auf einen geschlossenen Ausdruck

$$M \equiv \varrho\, u_\infty \int_a^0 \gamma(x, s)\, (x - b)\, dx$$

$$= \frac{4}{\pi}\, \varrho\, u_\infty \int_{-\infty}^{0} H(x, s) \left[\sqrt{\frac{a}{x}} \left(x - b + \frac{a}{3} \right) - (x - b) \log \frac{\sqrt{-x} + \sqrt{-a}}{\sqrt{|x - a|}} \right] dx \quad \text{für } t \to \infty. \quad (9)$$

Als Beispiel werde die geknickte Platte mit dem Ruderausschlagwinkel η bei stationärer Strömung berechnet (Abb. 3). Mit

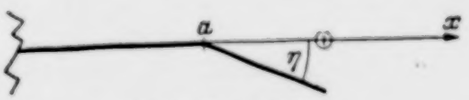


Abb. 3. Flosse mit Ruder.

$$w(x, s) = H(x, s) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ \eta\, u_\infty & \text{für } a \leqq x \leqq 0 \end{cases} \text{ und alle } s$$

findet man

$$\gamma(x) = \frac{4}{\pi}\, \eta\, u_\infty \log \frac{\sqrt{-x} + \sqrt{-a}}{\sqrt{|x - a|}}, \quad A = -\frac{4}{\pi}\, \eta\, \varrho\, u_\infty^2\, a, \quad M = \frac{4}{\pi}\, \eta\, \varrho\, u_\infty^2\, a \left(b - \frac{2}{3}\, a \right).$$

Dieses Ergebnis ist nach den obigen Überlegungen auch z. B. für die plötzlich einsetzende Bewegung, den „Anfahrvorgang" gültig.

3. Die *Wagner*sche Integralgleichung. Multipliziert man (1a) mit $(-x)^{-\frac{1}{2}}$, (1b) mit $(e^{-x} - 1)^{-\frac{1}{2}}$, integriert über $(-\infty, 0)$ und beachtet (4), so kommt die *Wagner*sche Integralgleichung des Problems[1]

$$\int_0^s \frac{\varepsilon(0, \sigma)}{\sqrt{s - \sigma}}\, d\sigma + 2 \int_{-\infty}^{0} \frac{w(x, s)}{\sqrt{-x}}\, dx = 0, \qquad \text{für } t \to \infty, \quad (9a)$$

$$\int_0^s \frac{\varepsilon(0, \sigma)}{\sqrt{1 - e^{\sigma - s}}}\, d\sigma + 2 \int_{-\infty}^{0} \frac{w(x, s)}{\sqrt{e^{-x} - 1}}\, dx = 0 \qquad \text{für } t = 2\pi. \quad (9b)$$

Gleichung (9a) besitzt schon die Gestalt der wohlbekannten *Abel*schen Integralgleichung[2], aber auch (9b) wird durch die Setzung

$$S = e^s - 1, \quad \Sigma = e^\sigma - 1, \quad \varepsilon(0, \sigma) = (1 + \Sigma)\, \bar{\varepsilon}(0, \Sigma), \quad w(x, s) = \sqrt{1 + S}\, \bar{w}(x, S)$$

in die Integralgleichung

$$\int_0^S \frac{\bar{\varepsilon}(0, \Sigma)}{\sqrt{S - \Sigma}}\, d\Sigma + 2 \int_{-\infty}^{0} \frac{\bar{w}(x, S)}{\sqrt{e^{-x} - 1}}\, dx = 0 \quad (9c)$$

[1] Fußnote 1 von Seite 134.
[2] Vgl. Fußnote 1 von S. 137.

von demselben Typ übergeführt. Mit der bekannten Lösung der *Abel*schen Integralgleichung[1] läßt sich dann sofort die Stärke ε der freien Wirbel in geschlossener Form angeben zu

$$\varepsilon(0, s) = -\frac{2}{\pi}\frac{d}{ds}\int_0^s \frac{1}{\sqrt{s-\sigma}} \int_{-\infty}^{0} \frac{w(x, \sigma)}{\sqrt{-x}}\, dx\, d\sigma \quad \text{für} \quad t \to \infty\,, \tag{10a}$$

$$\varepsilon(0, s) = -\frac{2}{\pi}\frac{d}{ds}\int_0^s \frac{1}{\sqrt{e^{s-\sigma}-1}} \int_{-\infty}^{0} \frac{w(x, \sigma)}{\sqrt{e^{-x}-1}}\, dx\, d\sigma \quad \text{für} \quad t = 2\pi\,. \tag{10b}$$

4. Beispiele: Es gelte

$$w(x, s) = w(x)\begin{cases} 0 & \text{für} \quad s < 0 \\ q(s) & \text{für} \quad s > 0\,. \end{cases}$$

Dann ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen einigen einfachen Funktionen $q(s)$ und den zugehörigen Wirbelstärken $\varepsilon(0, s)$:

$t \to \infty$:

$q(s)$	1	s	$\sqrt{s}$
$\frac{\varepsilon(0, s)}{C_1}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$2\sqrt{s}$	$\frac{\pi}{2}$

,

$t = 2\pi$:

$q(s)$	1	s	$e^{s/2}-1$	$\sqrt{1-e^{-s}}$
$\frac{\varepsilon(0, s)}{C_2}$	$\frac{1}{\sqrt{e^s-1}}$	$2 \operatorname{arc\,tg}\sqrt{e^s-1}$	$\sqrt{e^s-1}$	$\frac{\pi}{2}e^{-s/2}$

.

Dabei wurde zur Abkürzung gesetzt

$$C_1 = -\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{w(x)}{\sqrt{-x}}\, dx\,, \qquad C_2 = -\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{w(x)}{\sqrt{e^{-x}-1}}\, dx\,.$$

5. Folgerungen aus den abgeleiteten Formeln. a) Ein besonders einfacher Fall einer instationären Bewegung ist der Anfahrvorgang, wenn also das Flügelgitter aus der Ruhe heraus plötzlich mit einer konstanten Geschwindigkeit u_∞ bewegt wird. Obwohl der Flügel seine Lage nach dem An-

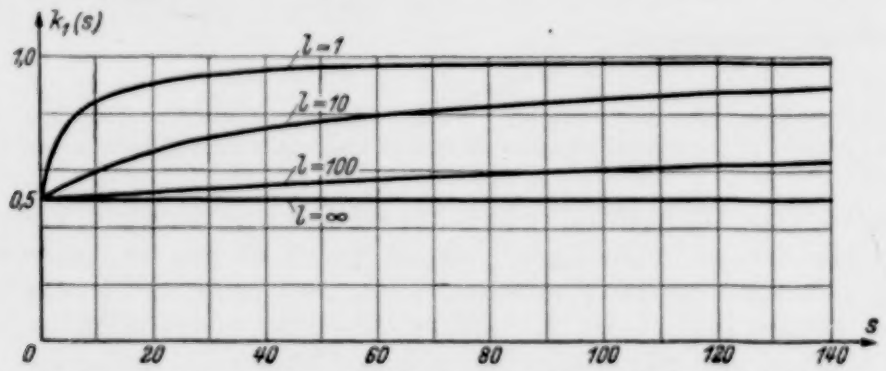


Abb. 4. Abminderungsfaktor $k_1(s)$ für den Auftrieb des endlich langen Einzelprofils beim Anfahrvorgang.

fahren nicht mehr ändert, stellt sich beim endlich langen Einzelflügel oder beim endlichen senkrechten Flügelgitter der endgültige Auftrieb nicht sofort ein, sondern wird erst asymptotisch erreicht. Man erhält die Auftriebsverteilung und damit auch den Auftrieb aus dem stationären Wert durch Multiplikation mit einem Abminderungsfaktor[2] $k_1(s)$ (Abb. 4). Da man den hier vollzogenen Grenzübergang zum unendlich langen Flügel ($l \to \infty$) auch als Lösung für den ersten Beginn der Bewegung ($s \ll l$) ansehen kann, folgt schon rein anschaulich, daß beim Anfahrvorgang jetzt $k_1(s) = k_1(0) =$ konst. wird (Abb. 4). Dieses Ergebnis bestätigt man sofort aus (6) und (8), da ja beim Anfahrvorgang $\partial H(x, s)/\partial s = 0$ wird für $s > 0$. Ganz entsprechend gilt offensichtlich auch

[1] Vgl. *W. Schmeidler*, Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik. Seite 212/213, Leipzig 1950.

[2] Vgl. Fußnote [1] von Seite 134 und Fußnote [8] von Seite 134.

die Verallgemeinerung: Hat sich das betrachtete Flügelgitter in beliebiger Weise bewegt und endet diese instationäre Bewegung plötzlich, so haben im gleichen Augenblick Auftriebsverteilung und Auftrieb schon ihren endgültigen Wert angenommen, nämlich denjenigen des stationären Zustands.

b) Da der Auftrieb eines Flügelprofils mit dem Impuls der hinter dem Flügel abwärts bewegten Strömung zusammenhängt, vermutet man weiterhin: Wenn sich der Flügelauftrieb nicht mehr ändert, so induziert der Flügel auch keine weiteren Änderungen in den Abwindgeschwindigkeiten hinter dem Flügel, obwohl die Wirbelschleppe evtl. noch nicht abbricht, also noch weitere freie Wirbel abschwimmen. Dieses Ergebnis läßt sich in der Tat aus den angegebenen Gleichungen erhalten. Die dazu notwendigen Umformungen sind zwar einfach, jedoch etwas umfangreich und mögen daher übergangen werden. Es gilt also: Hat die instationäre Bewegung des betrachteten senkrechten Flügelgitters zum Zeitpunkt s_1 aufgehört, so hängt die induzierte Abwindgeschwindigkeit $w(x, s)$ in Verlängerung der Flügelprofile im Bereich $0 \leqq x \leqq s_1$ **nicht** mehr von s ab. Dieses Ergebnis gilt nicht mehr außerhalb der Flügelsehnen, wie ein Blick auf das Beispiel in Abb. 5 zeigt.

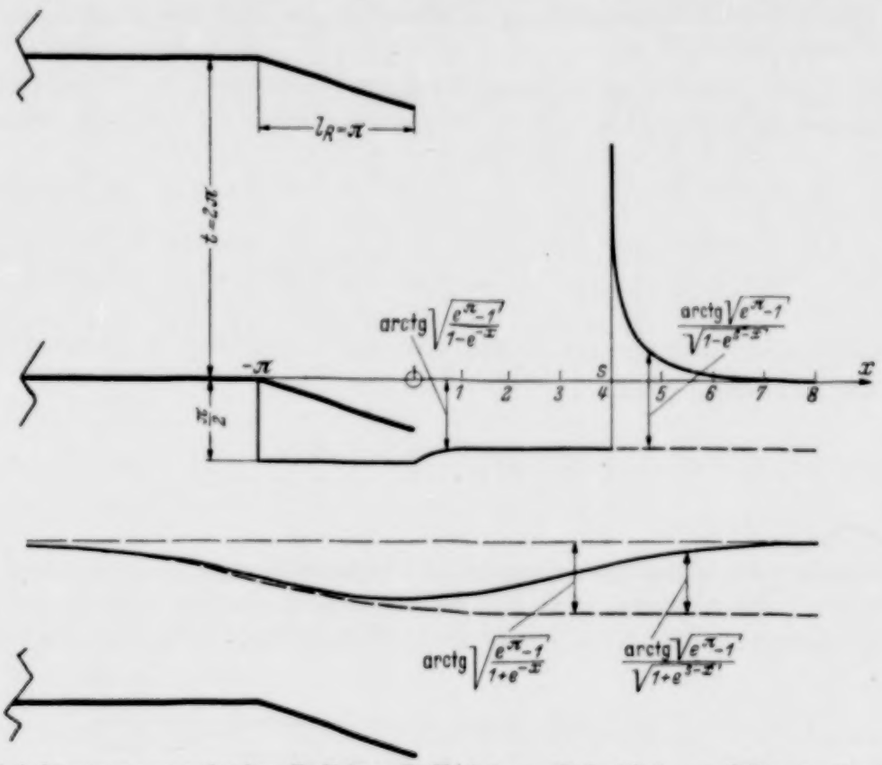


Abb. 5. Anfahrvorgang am senkrechten Profilgitter. Profiltiefe $l \to \infty$, Rudertiefe $l_R = \pi$, Teilung $t = 2\pi$, $s = 4$. Eingetragen sind die Abwindgeschwindigkeiten auf der Profilsehne und in der Mitte zwischen zwei Profilen.

c) Für das endlich lange Einzelprofil gilt bekanntlich das interessante Ergebnis, daß Flügelflattern schon bei nur **einem** Freiheitsgrad möglich ist. Z. B. gibt es nach *Söhngen*[1] eine reine Ruderschwingung eines reibungs- und kräftefrei angelenkten Ruders. *Söhngen* bemerkt dort, daß allein für unendlich kleines Ruder (oder: unendliche Flossenlänge bei endlichem Ruder, also in dem hier vorliegenden Sonderfall), keine Anfachung mehr vorhanden ist. Setzt man nämlich (Abb. 3)

$$w(x, s) = u_\infty \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -\infty < x < a, \\ \eta(s) + (x-a)\eta'(s) & \text{für} \quad a \leqq x \leqq 0, \end{cases}$$

so wird

$$H(x, s) = u_\infty \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -\infty < x < a, \\ \eta(s) + 2(x-a)\,\eta'(s) + \frac{1}{2}(x-a)^2\eta''(s) & \text{für} \quad a \leqq x \leqq 0. \end{cases}$$

Wegen der Linearität von (9) hat dann das Rudermoment um den Drehpunkt $x = a$ die Gestalt $M = A\,\eta + B\,\eta' + C\,\eta''$ mit Konstanten A, B und C. Wirken nun auf das Ruder außer diesem Luftkraftmoment M noch andere Momente ein, die nur von η (wie das Rückstellmoment) und η'' (Trägheit) abhängen, so sind ungedämpfte Schwingungen nur möglich, wenn der Koeffizient B

[1] Fußnote [8] von Seite 134.

von η' verschwindet. Aus (9) ergibt sich jedoch

$$B = -\frac{32}{9\pi}\varrho\, u_\infty^2\, a^3 \neq 0\,,$$

womit *Söhngens* Bemerkung noch einmal bestätigt ist. Dieses Ergebnis gilt jedoch auch noch für ein senkrechtes Gitter aus festen Flossen, die sich unendlich weit in Anströmrichtung erstrecken und an die reibungsfrei (keine Momente proportional zu η') im Punkte a Ruder angebracht sind (Abb. 3). Der wesentliche Term $2\,u_\infty\,(x-a)\,\eta'$ von $H(x,s)$ liefert hierbei nach (6b) eine Zirkulationsverteilung

$$\gamma(x,s) = \frac{2\,u_\infty\,\eta'}{\pi}\left[\sqrt{1-e^x}\int_a^0 \frac{\xi - x}{\mathfrak{Sin}\,\frac{\xi-x}{2}\sqrt{1-e^\xi}}\,d\xi + 4\,(x-a)\log\frac{\sqrt{e^{-a}-1}+\sqrt{e^{-x}-1}}{\sqrt{|e^{-x}-e^{-a}|}}\right],$$

die in $a \leqq x \leqq 0$ das Vorzeichen nicht wechselt. Damit verschwindet aber auch das zugehörige Glied $B\,\eta'$ des Luftkraftmoments nicht und dies bedeutet ja gerade die Unmöglichkeit einer ungedämpften Schwingung.

d) Die angegebenen geschlossenen Ausdrücke erlauben die einfache Berechnung und das Studium vieler Probleme, für die im Falle des endlich langen Gitters der Formelapparat zu unhandlich werden würde. Nur darf diese Leichtigkeit nicht darüber hinwegtäuschen, daß eine Übertragung der gewonnenen Ergebnisse auf das allgemeine Gitter der Abb. 1 häufig nicht zulässig ist, wie die vorangegangenen Beispiele a) bis c) zeigen!

(Eingegangen am 6. Juli 1956.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Karl Nickel*, Karlsruhe, Institut für angewandte Mathematik der Technischen Hochschule.

Die Extrema der Geschwindigkeiten an Kurbeltrieben

Von W. Meyer zur Capellen

1. Einleitung. Bei Kurbeltrieben, d. h. den Formen der Viergelenkkette, die Kurbeln enthalten, also bei der Kurbelschwinge (Abb. 1) und bei der Doppelkurbel (Abb. 2) nebst ihren Sonderformen, wird immer wieder die Frage nach der größten Abtriebsgeschwindigkeit bei gleichförmigem Antrieb gestellt. Für spezielle Fälle, wie für die zentrische[1] und für die geschränkte Schubkurbel ist die Frage zusammenfassend auf rechnerischem Wege beantwortet worden[2], wobei die Rechenarbeit im letzteren Fall nicht geringfügig war. Es soll nun hier nach den allgemeinen Bedingungen gefragt werden, die erfüllt sein müssen, damit das Abtriebsglied, d. h. also die Schwinge bzw. die Abtriebskurbel, oder aber auch die Koppelebene eine extremale Winkelgeschwindigkeit im Verlaufe eines Bewegungsspieles hat. Hierzu müssen vorher kurz einige im Folgenden benötigte, allgemeine kinematische Beziehungen zusammengestellt werden.

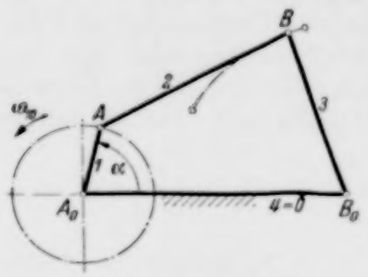


Abb. 1. Kurbelschwinge, $A_0A = a$, $B_0B = b$, $AB = c$, $A_0B_0 = d$.

2. Benutzte Ortskurven. a) Die *Bresse*schen Kreise. Alle Punkte einer komplan bewegten Ebene, welche im Augenblick einen Wende- oder Undulationspunkt ihrer Bahn durchlaufen und damit nur Tangential-, aber keine Normalbeschleunigung haben, erfüllen den Wendekreis K_W, der die

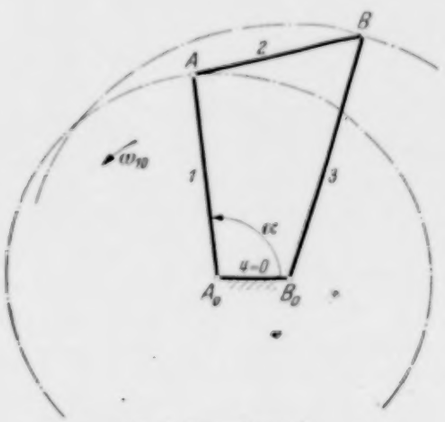


Abb. 2. Doppelkurbel.

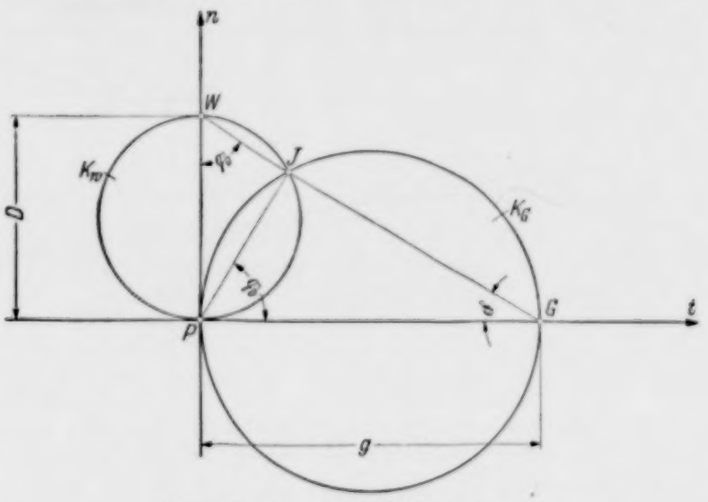


Abb. 3. Wendekreis und Gleichenkreis.

Polbahntangente t im Momentanpol P berührt; sein Durchmesser sei $PW = D$ (Abb. 3). Demgegenüber liegen alle Punkte, welche im Augenblick nur Normal-, also keine Tangentialgeschleunigung haben, auf dem Gleichenkreis K_G, welcher die Polbahnnormale n in P berührt; sein Durchmesser sei $PG = g$ (Abb. 3). Beide Kreise schneiden sich (unter rechtem Winkel) im Beschleunigungspol J. Während der Wendekreis durch die Geometrie des Getriebes festgelegt ist, bestimmt der Beschleunigungszustand die Lage von G: Aus Winkelgeschwindigkeit ω und Winkelbeschleunigung ε der bewegten Ebene folgt

$$g = PG = D\frac{\omega^2}{\varepsilon} = D \operatorname{ctg}\delta = D \operatorname{tg}\varphi_0 , \tag{1}$$

wenn Winkel $PGW = \delta$ und Winkel $JPG = \varphi_0$ gesetzt ist. Die Beschleunigungsvektoren bilden mit den jeweilig zum Beschleunigungspol J gezogenen Strahlen den konstanten Winkel $\delta = \pi/2 - \varphi_0$, so daß z. B. die Polbeschleunigung von P nach W gerichtet ist.

[1] *W. Meyer zur Capellen*, Getriebetechnik 5 (1937) S. 529.

[2] *W. Meyer zur Capellen* u. Mitarbeiter, Bewegungsverhältnisse an der geschränkten Schubkurbel. Erscheint demnächst in den vom Wirtschafts- u. Verkehrsministerium von Nordrhein-Westfalen herausgegebenen Forschungsberichten.

Durch den Wendekreis sind auch die Krümmungsverhältnisse der bewegten Ebene vermöge der *Euler-Savary*schen Formel

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{1}{w} \tag{2}$$

gegeben, worin (Abb. 4) $r = PA$, $r_0 = PA_0$, $w = PA_W = D \sin\varphi$ und A_0 der Krümmungsmittelpunkt der von A beschriebenen Bahnstelle ist.

b) Kreisungs- und Angelpunktkurve. 1. *Allgemeine Darstellung.* Bekanntlich erfüllen diejenigen Punkte der bewegten Ebene, die im Augenblick eine Bahnstelle mit vier- oder mehrpunktig berührendem Krümmungskreis durchlaufen, die Kreisungspunktkurve k_u und die dazugehörigen Krümmungsmittelpunkte die Angelpunktkurve[1] k_a. Es handelt sich um zirkulare Kurven dritter Ordnung, welche in Polarkoordinaten r, φ bzw. r_0, φ die folgende auf P als Pol und t als Polarachse bezogenen Gleichungen haben:

$$k_u\colon\ r\,(m\cos\varphi + l\sin\varphi) - m\,l\sin\varphi\cos\varphi = 0\,, \tag{3a}$$

oder

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{l\sin\varphi} + \frac{1}{m\cos\varphi}\,, \tag{3b}$$

ferner nach (2)

$$k_a\colon\ r_0\,(m\cos\varphi + l_0\sin\varphi) - m\,l_0\sin\varphi\cos\varphi = 0\,, \tag{4a}$$

oder

$$\frac{1}{r_0} = \frac{1}{l_0\sin\varphi} + \frac{1}{m\cos\varphi}\,. \tag{4b}$$

Hierbei sind — wesentlich nach *Müller*[1] — die folgenden Abkürzungen benutzt worden:

$$PL = l = \frac{3}{2\,\vartheta' + \tau'}\,, \qquad PM = m = \frac{3\,\vartheta'}{\vartheta''}\,,$$

$$PL_0 = l_0 = \frac{3}{\tau' - \vartheta'}\,,$$

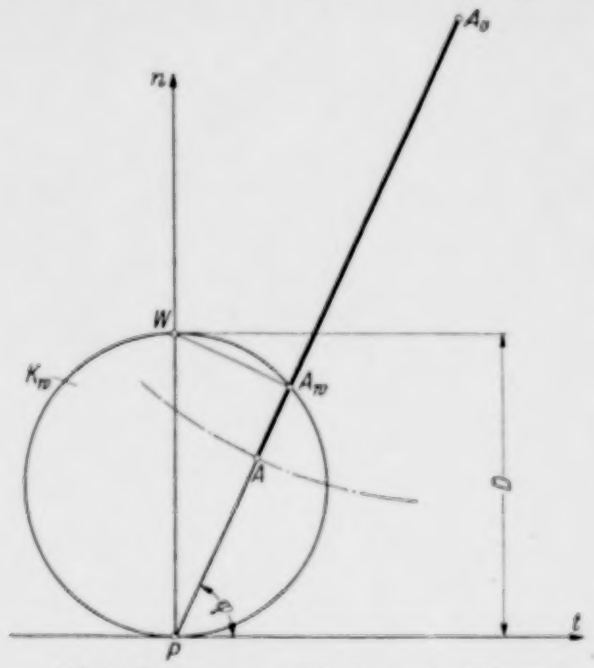


Abb. 4. Erläuterung zur *Euler-Savary*schen Formel.

ds = Bogenelement der Rastpolbahn, $d\vartheta$ = Elementardrehung der bewegten Ebene, d. h. $d\vartheta/dt = \omega$, $d\tau$ = Kontingenzwinkel der Rastpolbahn, Striche Ableitungen nach s, d. h. z. B. $\vartheta' = d\vartheta/ds = 1/D$, $\tau' = d\tau/ds = 1/R_0$ = Krümmung der Rastpolbahn.

Schließlich sind l und l_0 die Durchmesser der Krümmungskreise von k_u bzw. k_a in P, deren Mittelpunkte auf n liegen und ist m der Durchmesser des Krümmungskreises von k_u und k_a in P, dessen Mittelpunkt auf t liegt. Zu beachten ist noch, daß nach (3) einerseits

$$\frac{1}{l} - \frac{1}{l_0} = \frac{1}{D} \tag{5a}$$

und andererseits

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} = \frac{1}{D} \tag{5b}$$

mit R als Krümmungsradius der Gangpolbahn gilt.

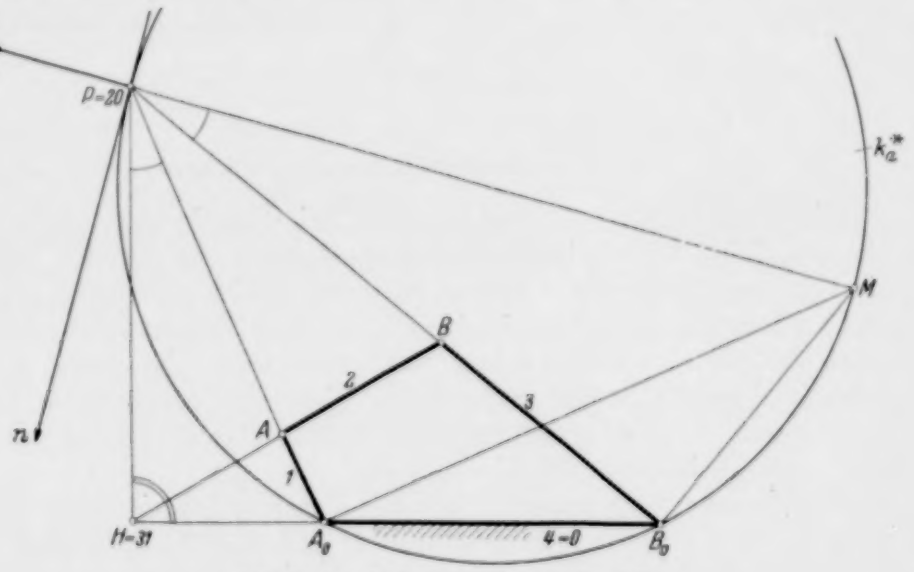


Abb. 5. „Kardanlage": PH senkrecht A_0B_0.

c) *Sonderfälle.* Für die vorliegende Untersuchung werden von den vielen an sich möglichen Sonderfällen nur die folgenden benötigt:

[1] Herleitung vgl. z. B. *Müller, R.*, Einführung in die theoretische Kinematik, Berlin 1931 (dort werden k_u und k_a mit Kreispunkt- und Mittelpunktkurve bezeichnet), ferner *R. Beyer*, Kinematische Getriebesynthese, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953.

α) **Die Kardanlage**[1]: Die Mittelpunktkurve k_a entartet in die Polbahntangente t und den die Polbahnnormale n in P berührenden Kreis k_a^* vom Durchmesser $PM = m$, wobei k_u **nicht** entartet. Diese Entartung tritt auf, wenn $l_0 = \infty$, d. h. $l = D$ und $\tau' - \vartheta' = 0$, d. h. $R_0 = D$, also nach (5b) $R = D/2$ wird. Der Krümmungsradius der Rastpolbahn ist doppelt so groß als jener der Gangpolbahn, wobei die erstere die letztere umschließt, und da der Krümmungskreis der Gangpolbahn mit dem Wendekreis übereinstimmt, liegt momentan die Kardanbewegung vor, wonach der Name „Kardanlage" geprägt wurde. Beim ebenen Gelenkviereck hat man diesen Fall in der Totlage oder wenn die Verbindungsgrade des Momentanpols $P = 20$ mit dem Relativpol $H = 31$ (Abb. 5) auf dem Steg A_0B_0 senkrecht steht.

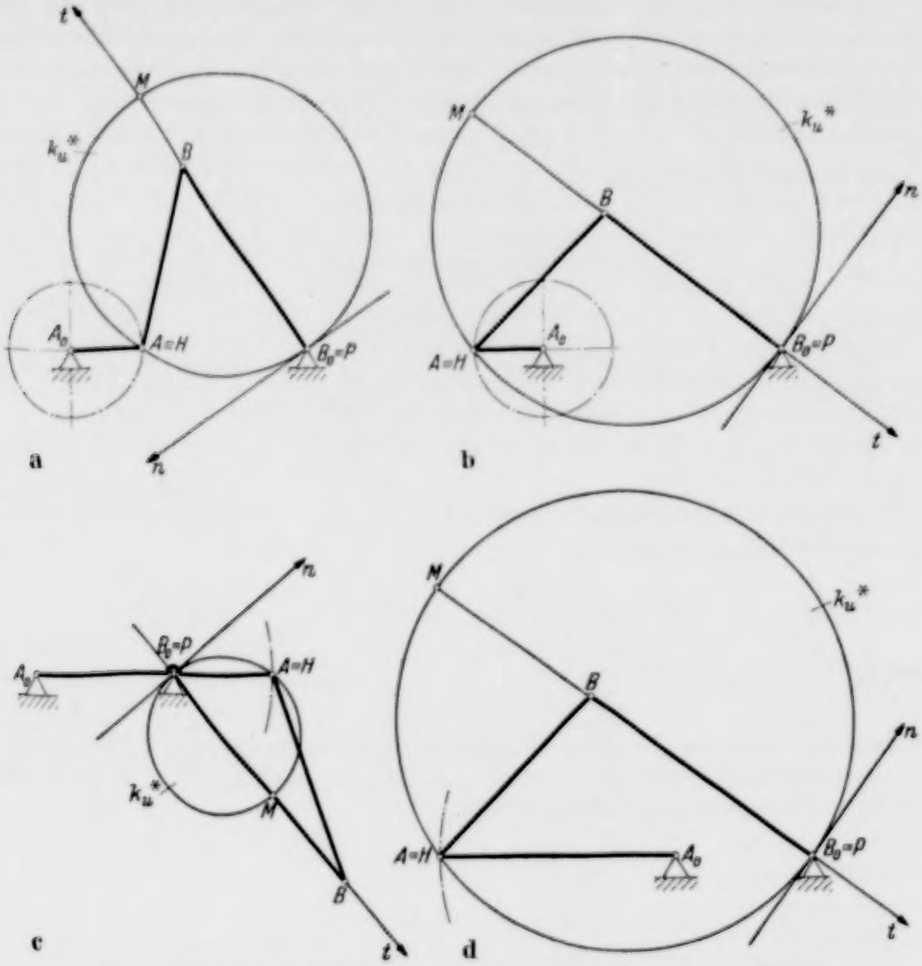


Abb. 6. Kurbeltriebe in den Steglagen. a, b) Kurbelschwinge; c, d) Doppelkurbel

β) **Die umgekehrte Kardanlage**: Bei Umkehr der soeben betrachteten Lage entartet die Kreisungspunktkurve k_u in die Polbahntangente t und den die Polbahnnormale in P berührenden Kreis k_u^* vom Durchmesser $PM = m$, wobei k_a **nicht** entartet. Es ist dann $l = \infty$ und $l_0 = -D$, der Kreis vom Durchmesser l_0 ist identisch mit dem Rückkehrkreis, kurz gesagt, es liegt momentan die umgekehrte Kardanbewegung vor, weswegen hier diese **neue** Bezeichnung „umgekehrte Kardanlage" gewählt wurde. Beim Kurbeltrieb erhalten wir diesen Fall in den Steglagen, (Abb. 6a/d) oder, wenn die Verbindungsgerade der Punkte $P = 20$ und $H = 31$ senkrecht zur **Koppel** steht (Abb. 7) oder beides zutrifft (Abb. 8a/f).

γ) **Stationärer Wendekreis**: Hat der Wendekreisdurchmesser D einen stationären Wert, d. h. ist $\vartheta'' = 0$, so geht m nach unendlich und entartet k_u in die Polbahnnormale n und den Kreis k_u^{**} vom Durchmesser $PL_0 = l$, ebenso k_a in die Polbahnnormale n und den Kreis k_a^{**} vom Durchmesser $PL_0 = l_0$, wobei diese Kreise die Polbahntangente in P berühren. Dieser Fall tritt beim Gelenkviereck dann auf, wenn Koppel und Steg parallel[2] sind oder wenn die Kurbel A_0A zur Polbahnnormale wird.

[1] *W. Meyer zur Capellen*, Ing.-Arch. 18 (1949) S. 308; *O. Bottema*, Nederlandsche Ak. Wetenschaapen, Vol. I—II, Nr. 6 (1949).

[2] Über eine ausführliche Anwendung dieser Stellung vgl.: *W. Meyer zur Capellen*, Konstruktion 8 (1956) S. 510.

3. Die Extrema der Abtriebsgeschwindigkeit. Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen kommen wir nun zum eigentlichen Problem: Die Kurbel A_0A der Getriebe gemäß Abb. 1 und 2 werde mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega_a = \omega_{10}$ angetrieben und bewirke dadurch in Abb. 1 eine schwingende, in Abb. 2 eine umlaufende, aber ungleichförmige Bewegung im Abtriebsglied $B_0B = 3$. Gefragt ist nach denjenigen Stellungen, in denen die Geschwindigkeit v_B des Punktes B oder auch die Winkelgeschwindigkeit $\omega_b = \omega_{30}$ dieses Gliedes ein Extremum hat.

a) Bedingungen. Die Punkte A und B der allgemein bewegten Koppelebene beschreiben Kreise bzw. Kreisbögen, d. h. durchlaufen Bahnstellen mit (mindestens) vierpunktig berührendem Krümmungskreis, gehören also der Kreisungspunktkurve k_u an. Wenn weiter v_B ein Extremum haben soll, so muß dv_B/dt, d. h. die Tangentialbeschleunigung $b_t = dv_B/dt$ gleich Null sein. Da A von vornherein nur Normal-, also keine Tangentialbeschleunigung hat und B in dem betrachteten Augenblick ebenfalls keine Tangentialbeschleunigung hat, müssen beide Punkte auf dem Gleichen-

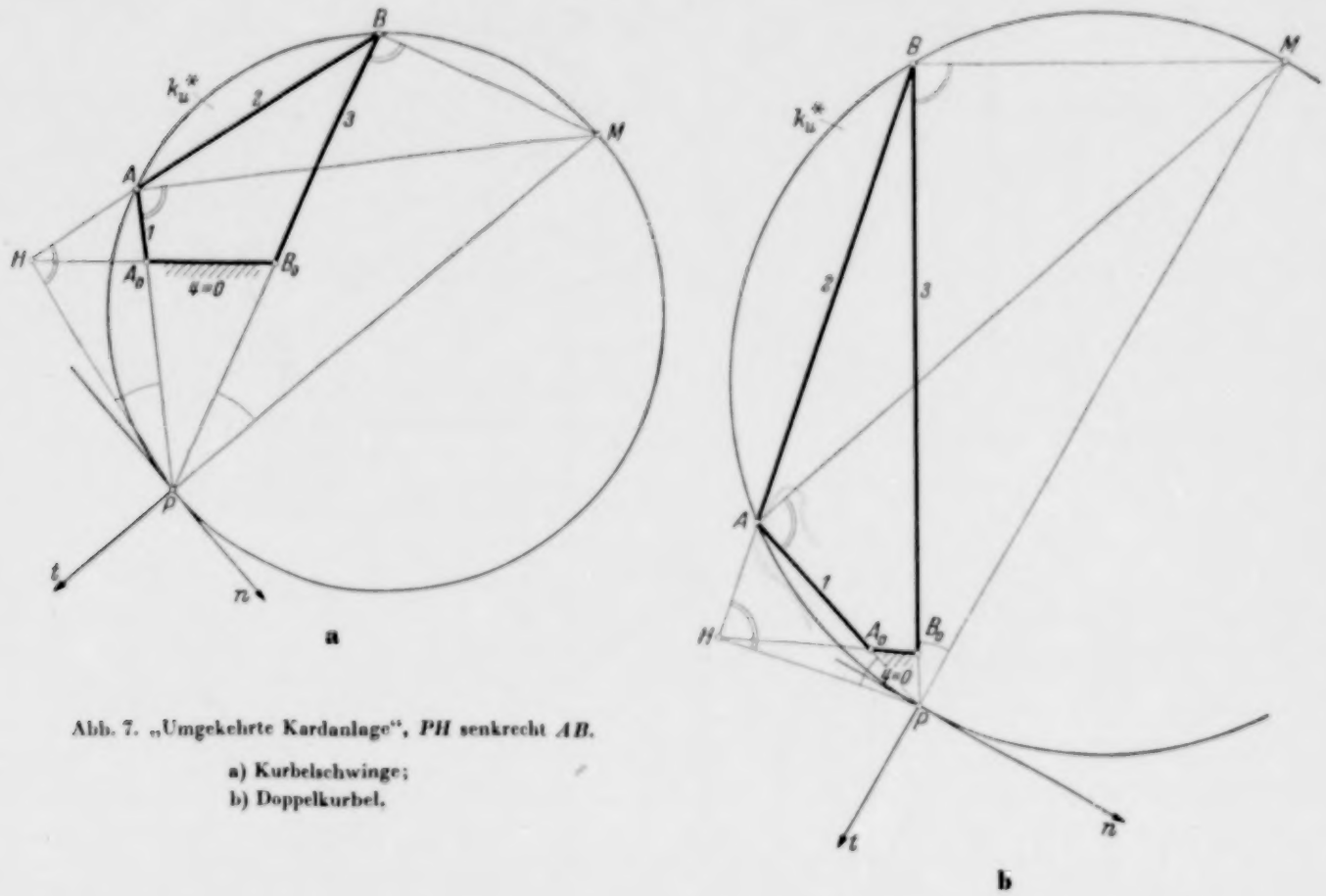


Abb. 7. „Umgekehrte Kardanlage", PH senkrecht AB.
a) Kurbelschwinge;
b) Doppelkurbel.

kreis K_G liegen. In beliebiger Lage berührt K_G die Kurve k_u in P längs der gemeinsamen Tangente n und hat dort mit k_u zwei unendlich benachbarte Punkte gemeinsam, trifft also k_u noch in einem weiteren Punkt. Wenn aber k_u und K_G außer in P noch zwei Punkte, nämlich A und B gemeinsam haben sollen, so müssen K_G und k_u ganz übereinstimmen, d. h. aber die Kreisungspunktkurve muß hier in den oben genannten Kreis k_u^* vom Durchmesser m und die Polbahntangente t entarten, wobei k_u^* und K_G identisch sind.

Ergebnis: Die Abtriebsgeschwindigkeit v_B bzw. die Abtriebswinkelgeschwindigkeit $\omega_b = \omega_{30}$ beim Kurbeltrieb hat dann ein Extremum, wenn sich das Getriebe in der umgekehrten Kardanlage befindet, d. h. wenn die Gerade PH senkrecht zur Koppel steht (Abb. 7), also der Abstand ξ des Poles P von der Senkrechten zu AB in H gleich Null wird (vgl. u.), hierzu kann in Sonderfällen auch die Steglage gerechnet werden.

Die Steglage erfüllt diese Bedingung nur dann, wenn der Punkt G mit dem Punkt B übereinstimmt, d. h. wenn B auf der Polbahntangente t liegt (Abb. 8a/d). Dieser Sonderfall kann aber nur dann auftreten, wenn gewisse Maßbeziehungen zwischen den Gliedlängen erfüllt werden, d. h. wenn

$$c^2 + (d - a)^2 - b^2 = 0 \quad \text{(Abb. 8a, c)} \tag{6a}$$

oder

$$c^2 + (d + a)^2 - b^2 = 0 \quad \text{(Abb. 8b, d)} \tag{6b}$$

ist. Hierbei beziehen sich Abb. 8c und 8d auf die Doppelkurbel, wenn die Antriebskurbel a auf dem Steg liegt. Es kann aber auch die Abtriebskurbel auf dem Steg liegen (Abb. 8e und 8f), vorausgesetzt, daß

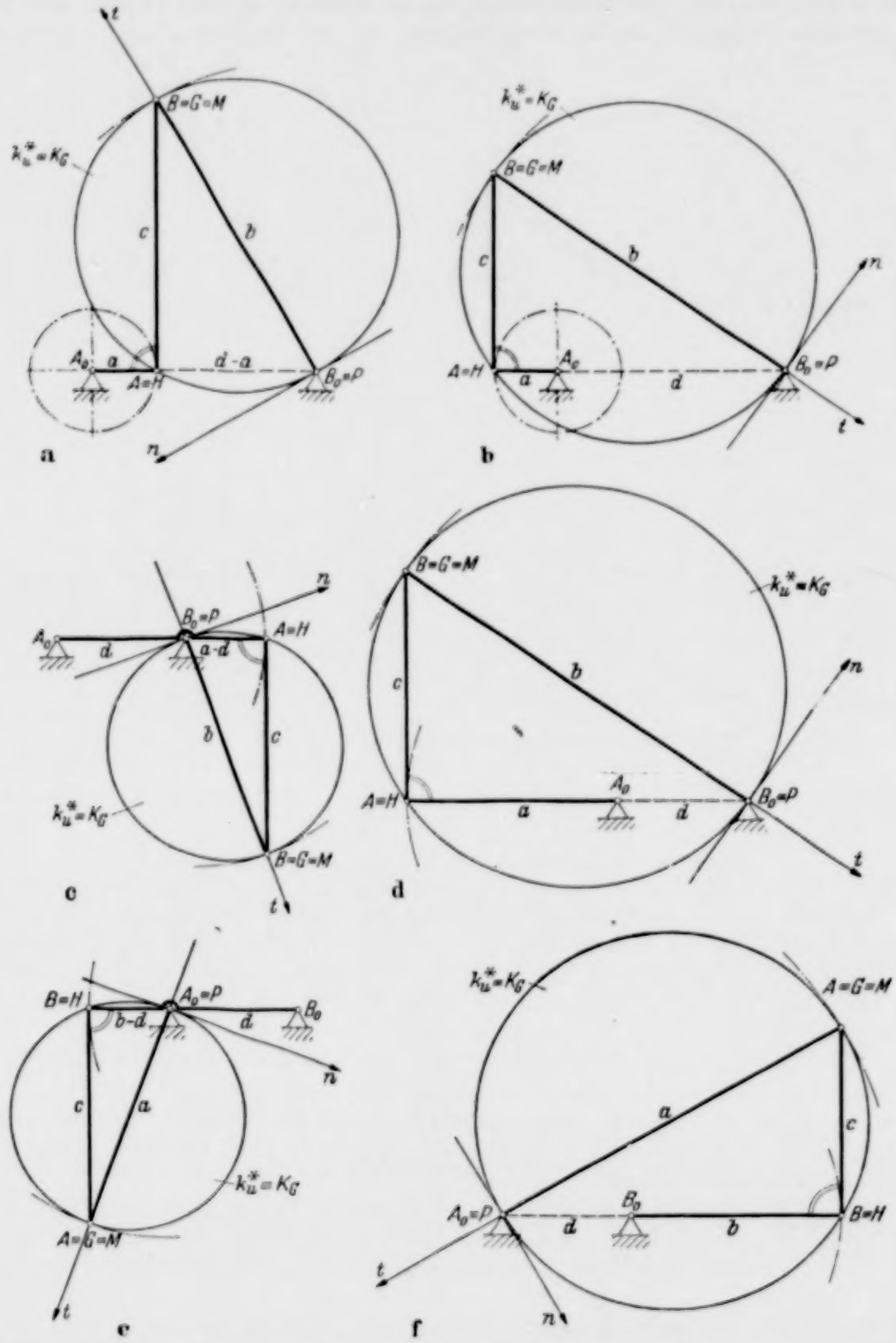
$$c^2 + (b - d)^2 - a^2 = 0 \quad \text{(Abb. 8e)} \tag{6c}$$

oder

$$c^2 + (b + d)^2 - a^2 = 0 \quad \text{(Abb. 8f)} \tag{6d}$$

ist.

b) Praktische Anwendung. Ist ein Getriebe mit bekannten Abmessungen gegeben, so ermittelt man die Geschwindigkeit des Abtriebes, d. h. v_B, in bekannter Weise mit Hilfe der gedrehten Geschwindigkeiten, wobei $v_A \mathrel{\triangleq}$ a cm gezeichnet wird ($\omega =$ „1“) (Abb. 9a und 10a) oder



a b c d e f

Abb. 8. Kurbeltriebe, bei denen in der Steglage die Koppel senkrecht zum Steg steht bzw. senkrecht zu PH. a) und b) Kurbelschwingen; c), d), e) und f) Doppelkurbeln.

mit Hilfe des Satzes von *Euler*, wonach $\mathfrak{v}_B = \mathfrak{v}_A + \mathfrak{v}_{BA}$ ist und $\mathfrak{v}_{BA}$ senkrecht zur Koppel AB steht, beiläufig auch den Betrag $c\,\omega = c\,\omega_{20}$ hat mit $\omega = \omega_{20}$ als Winkelgeschwindigkeit der Koppelebene gegenüber dem Gestell (Abb. 9b und 10b). Trägt man v_B über dem Kurbelwinkel α und damit über der Zeit auf mit $\alpha = 0$ in der rechten Steglage, da α ja proportional der Zeit t ist, und schreibt an v_A den Wert eins an, so stellt die erhaltene Kurve maßstäblich das Übersetzungsver-

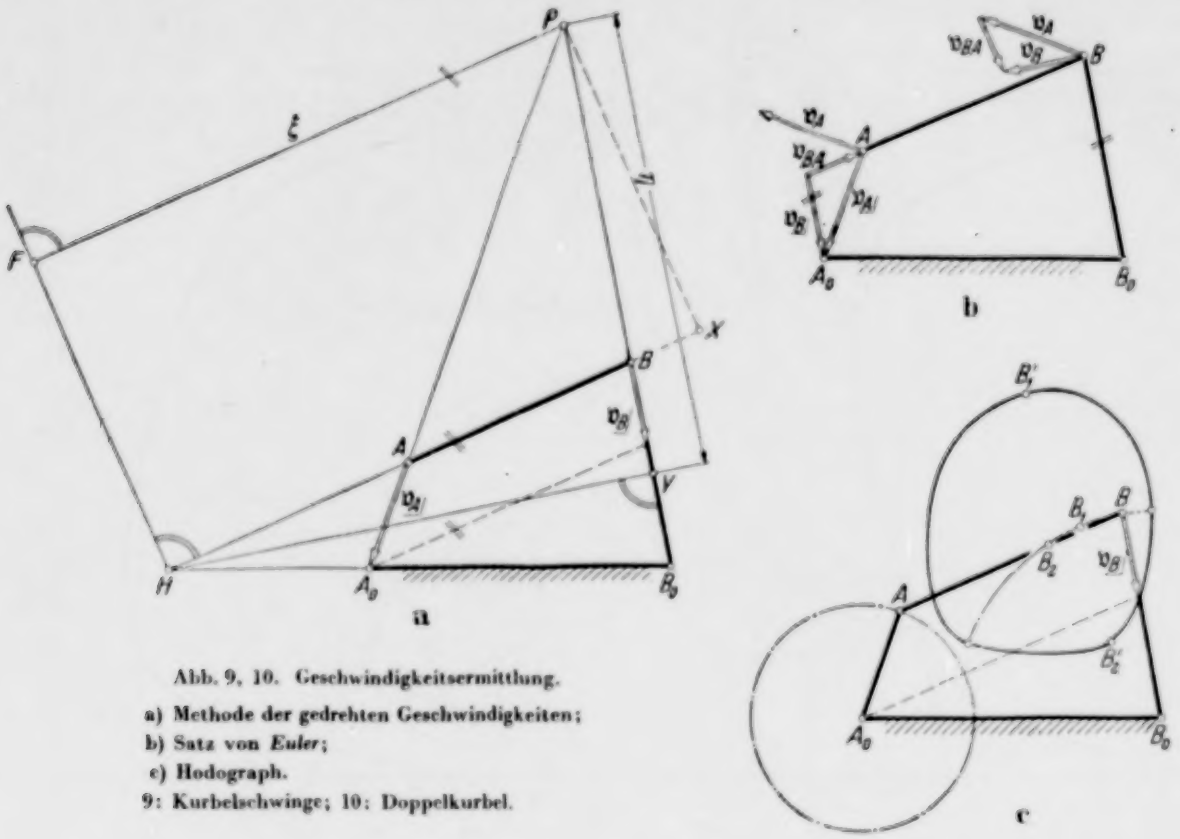


Abb. 9, 10. Geschwindigkeitsermittlung.
a) Methode der gedrehten Geschwindigkeiten;
b) Satz von *Euler*;
c) Hodograph.
9: Kurbelschwinge; 10: Doppelkurbel.

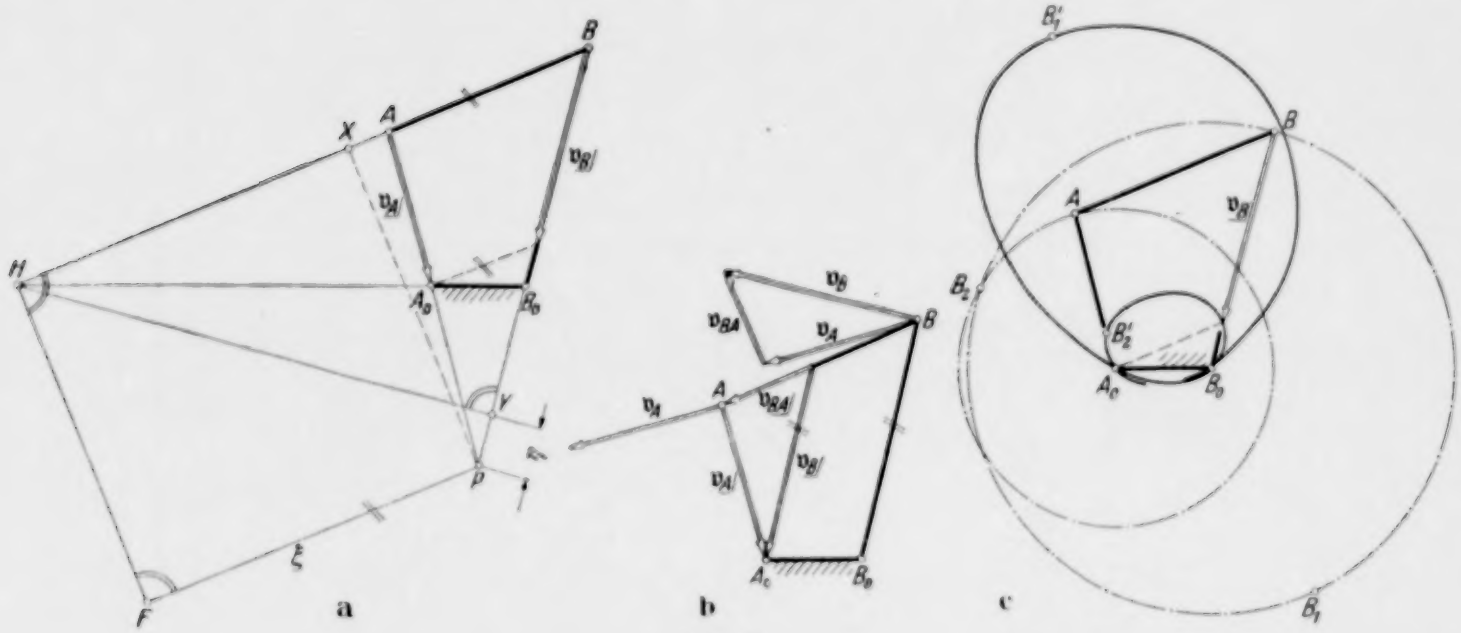


Abb. 10.

hältnis v_B/v_A dar (Abb. 11 und 12) bzw. auch das Übersetzungsverhältnis $\omega_b/\omega_a = a/b \cdot (v_B/v_A)$. Beim Zeichnen des Hodographen der gedrehten Geschwindigkeiten (Abb. 9c, 10c) erkennt man bereits etwa die Stellung, in der v_B einen Höchst- oder Tiefstwert hat. Man zeichnet dann in einigen benachbarten Stellungen die Pole P und H, errichtet in H auf AB die Senkrechte und ermittelt den Abstand $PF = \xi$ des Punktes P von dieser Senkrechten (Abb. 9a und 10a) oder fällt von P das Lot auf die Koppel, Fußpunkt X, so daß auch $HX = \xi$ wird. Dann trägt man diese Strecke ξ über α auf (Abb. 11 und 12) und verbindet die so erhaltenen Punkte. Jetzt liefert der Schnittpunkt der ξ-Kurve mit der α-Achse denjenigen Wert α, in welchem v_A ein Extremum hat.

Diese Konstruktion läßt sich rasch und einfach durchführen.[1] Sie ist vor allem einfacher als die Ermittlung der Nullstelle von b_t, indem man für einige benachbarte Stellungen die Beschleunigung des Punktes B ermittelt und die Tangentialkomponente b_t über α aufträgt. Abb. 13a zeigt die allgemeine

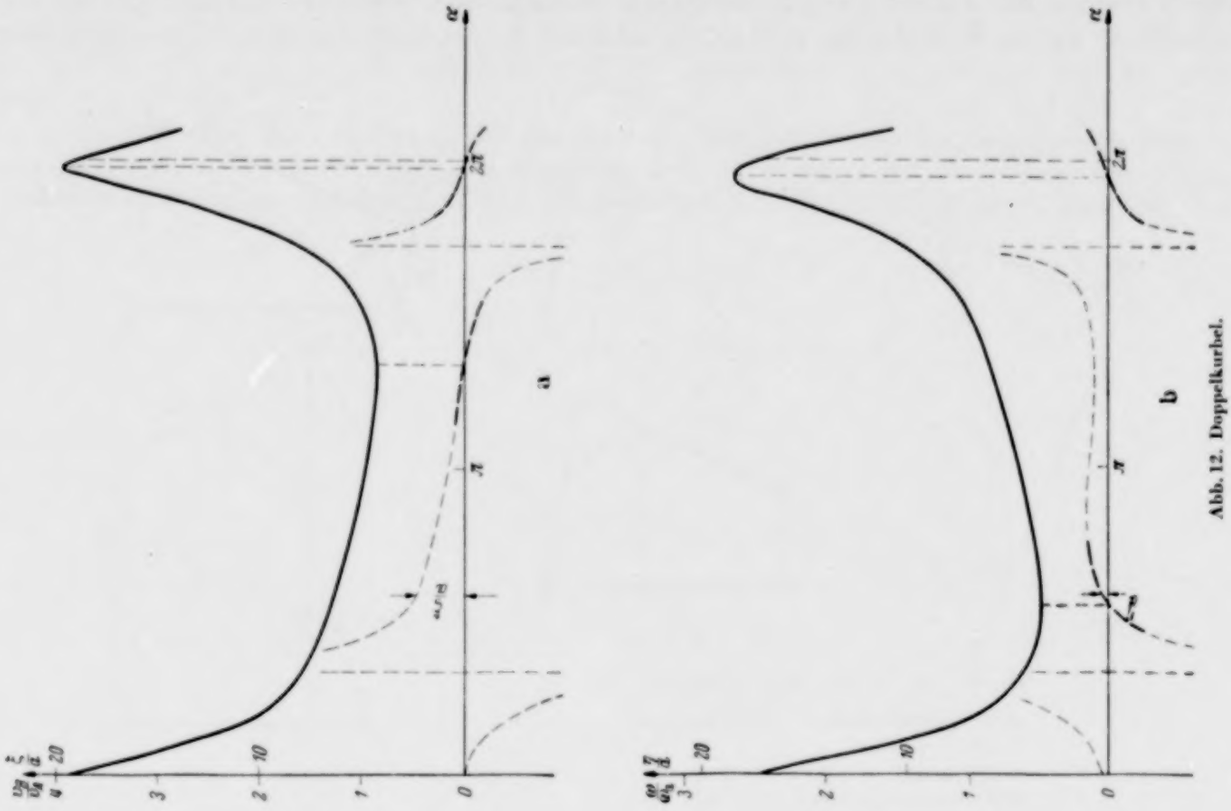


Abb. 12. Doppelkurbel.

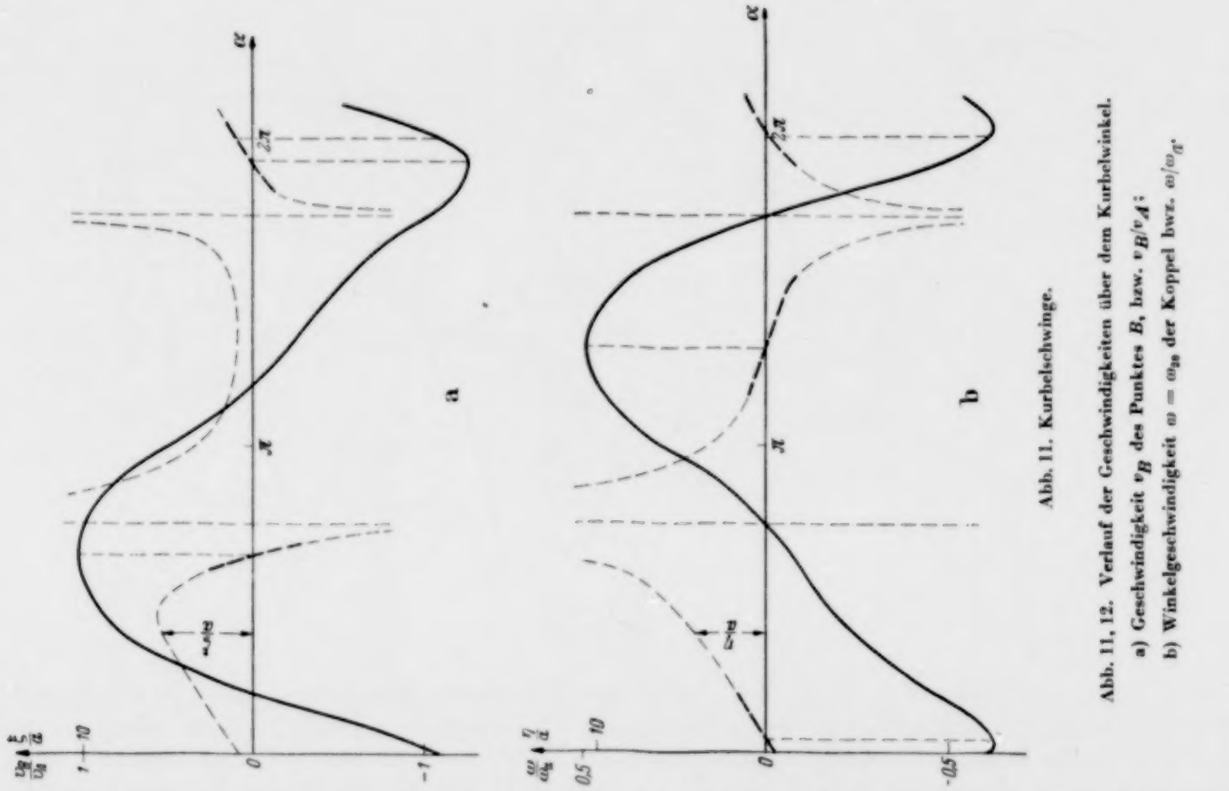


Abb. 11. Kurbelschwinge.

Abb. 11, 12. Verlauf der Geschwindigkeiten über dem Kurbelwinkel.
a) Geschwindigkeit v_B des Punktes B, bzw. v_B/v_A;
b) Winkelgeschwindigkeit $\omega = \omega_{ab}$ der Koppel bwz. ω/ω_a.

Beschleunigungskonstruktion an der Kurbelschwinge, Abb. 13b eine Stellung, in welcher $b_t = 0$ ist, während Bild 14a, b das Gleiche für die Doppelkurbel darstellt [vgl. Abs. d 2)]. Wenn beiläufig die Antriebswinkelgeschwindigkeit ω_a, also v_A nicht konstant ist, so bleibt das Übersetzungsverhältnis

[1] Der Vollständigkeit halber ist die gesamte ξ-Kurve gezeichnet.

v_B/v_A bzw. ω_b/ω_a, das ja nur geometrisch bedingt ist, erhalten, und die vorhin bestimmte Stellung für ein Extremum von v_B stellt dann ein Extremum eben dieses Übersetzungsverhältnisses dar.

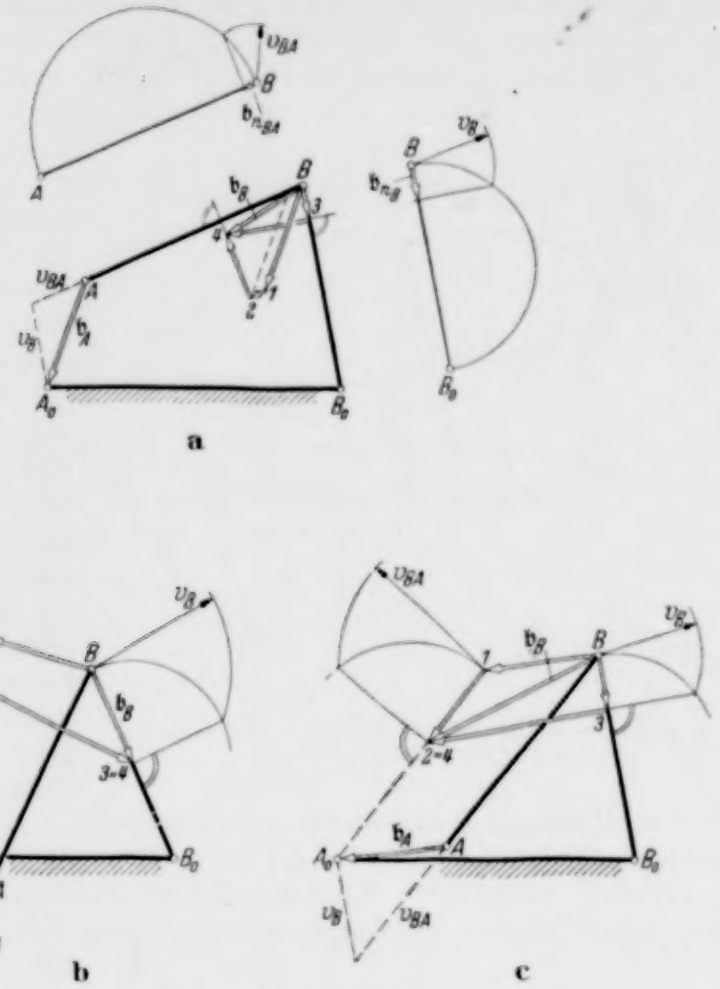
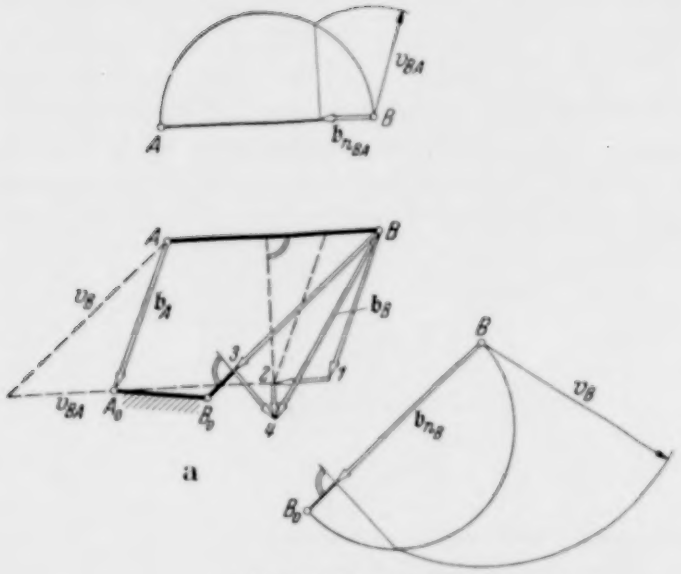
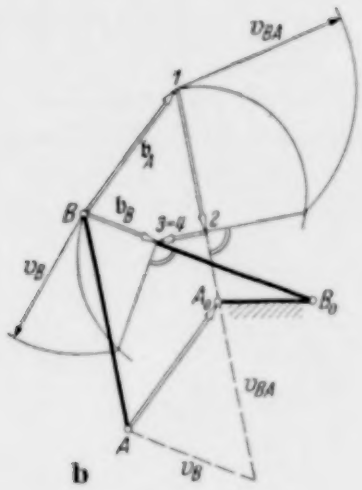


Abb. 13. Kurbelschwinge.





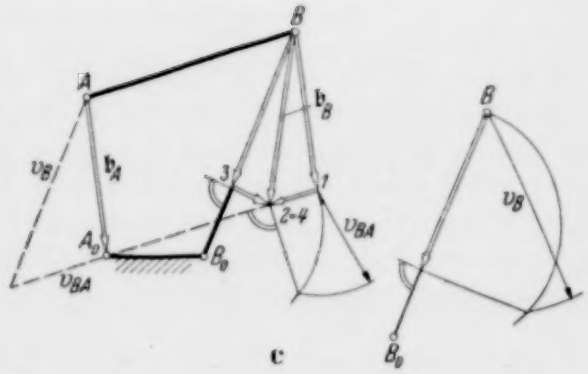


Abb. 14. Doppelkurbel.

Abb. 13, 14. Konstruktion der Beschleunigung b_B des Punktes B vermöge

$$b_B = b_A + b_{nBA} + b_{tBA} = b_{nB} + b_{tB}.$$

a) in beliebiger Lage;
b) in der Stellung eines Extremums von v_B, dh. $b_{tB} = b_t = 0$;
c) in der Stellung eines Extremums von v_{BA} bzw. ω_{20}, d. h. $b_{tBA} = 0$.

c) Allgemeines Bild. Gibt man sich Wendekreis und Gleichenkreis vor (Abb. 15), also neben D noch den Quotienten ω^2/ε, [Abs. 2a)], so erfüllen alle Gelenkvierecke, deren Koppelpunkte A und B auf dem Gleichenkreis bzw. der damit identischen Kreisungspunktkurve k_u^* liegen, die betrachtete Bedingung, wobei A_0 und B_0 nach der *Euler-Savary*schen Formel (3), rechnerisch oder zeichnerisch zu ermitteln sind (Kontrolle $PH \perp AB$). Gibt man sich die Koppellänge $AB = c \leqq g$ vor, so erhält man unendlich viele Gelenkvierecke mit der betrachteten Bedingung; da man aber noch c variieren kann, schließlich aber auch noch g, so erhält man insgesamt ∞^3 mögliche Gelenkvierecke, wobei dann im Einzelfall untersucht werden muß, ob das Getriebe drehfähig ist, also die *Grashof*schen Bedingungen erfüllt, und ob es sich um eine Kurbelschwinge oder eine Doppelkurbel handelt. Da ein Gelenkviereck durch die vier Größen a, b, c, d bestimmt ist, infolge der geometrischen Ähnlichkeit aber nur drei Parameter, z. B. a/c, b/c, d/c wesentlich sind, so führt die rechnerische Ermittlung der Stellungen, in denen ein Extremum von v_B auftritt, auf Abhängigkeiten von eben diesen drei variablen Parametern, wonach wieder eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit der Möglichkeiten gegeben ist. Die rechnerische Lösung wäre allerdings sehr weitläufig. Denn bereits beim exzentrischen Schubkurbelbetrieb[1] mit zwei Parametern erhält man für $\sin\alpha$, worin α der Kurbelwinkel, eine Gleichung sechsten Grades, während beim zentrischen Schubkurbeltrieb[2] mit einem Parameter nur eine Gleichung dritten Grades auftritt.

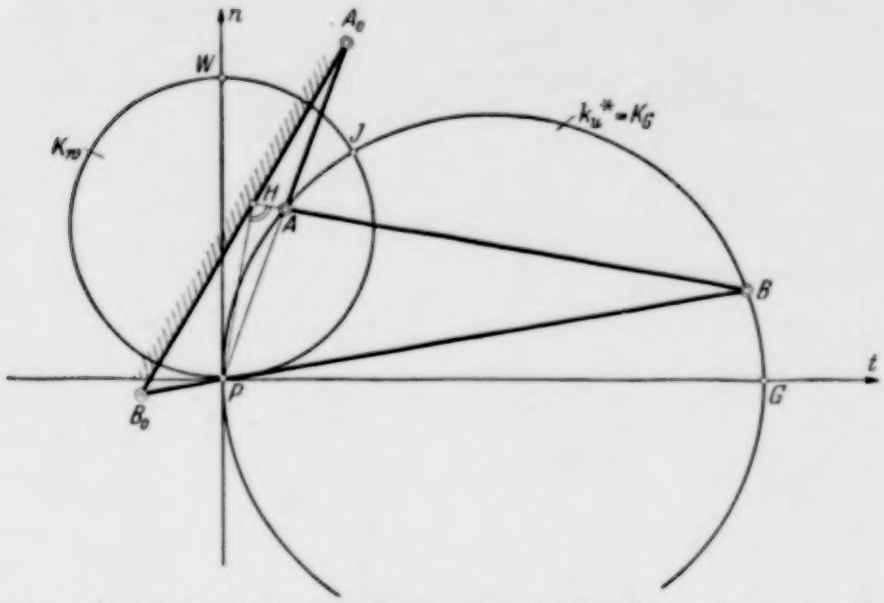


Abb. 15. Kurbeltrieb bei gegebenem Wendekreis und Gleichenkreis = Kreisungspunktkurve k_u^*, A und B beliebig auf k_u^* angenommen (vgl. Text).

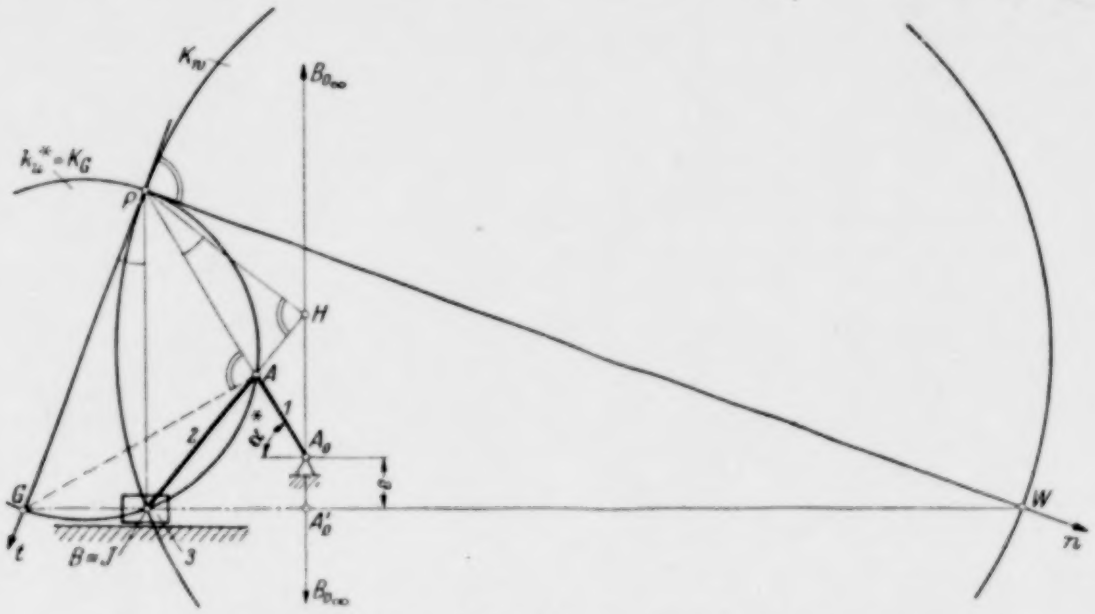


Abb. 16. Schubkurbeltrieb in einer Stellung extremaler Geschwindigkeit des Punktes B.

d) Sonderfälle. 1. *Die Schubkurbel.* Bei der soeben erwähnten geschränkten oder auch zentrischen Schubkurbel als Sonderfall der Kurbelschwinge entartet die Schwinge 3 zu dem Schubglied 3, d. h. es ist $\omega_{30} = 0$, und es fällt der Gelenkpunkt B, da gerade geführt, mit dem Beschleunigungspol J selbst zusammen, (Abb. 16). Da PH senkrecht AB stehen muß, kann nicht gleichzeitig die Koppel AB auch senkrecht zum Kurbelradius stehen — womit die auch heute noch im Schrifttum zu findende Behauptung, v_B hätte ein Extremum, wenn die Koppel Tangente an den Kurbelkreis ist, sofort widerlegt ist.

[1] Vgl. Fußnote 2 von S. 140. [2] Vgl. Fußnote 1 von S. 140.

Eine Ausnahme hiervon macht nur die Steglage: Da B_0 im Unendlichen liegt, ist diese hier die Stellung, in der auch die Kurbel A_0A senkrecht zur Führung von B steht. Da eine Schubkurbel aus der Kurbelschwinge für $b \to \infty$ und $d \to \infty$, aber $d - b = e =$ endlich, entsteht, folgt aus (6a), wenn dort $b = d - e$ eingesetzt wird, $(c^2 + a^2 - e^2)/d - 2(a - e) = 0$ und für $d \to \infty$ die Bedingung $a = e$, d. h. die gerade Bahn von B muß den Kurbelkreis berühren. Die Koppel kann aber dann den Kurbelkreis nur berühren, wenn

$$\alpha = 3\pi/2$$

ist. Beiläufig liegt dann P unendlich fern [vgl. folgenden Abs. 2)] und ist $\mathfrak{v}_B = \mathfrak{v}_A$. Wenn also $a = e$ oder $\lambda = \bar{\varepsilon}$ mit $\lambda = a/c$ und $\bar{\varepsilon} = e/c$ ist, so tritt das eine Extremum in dieser Stellung auf[1].

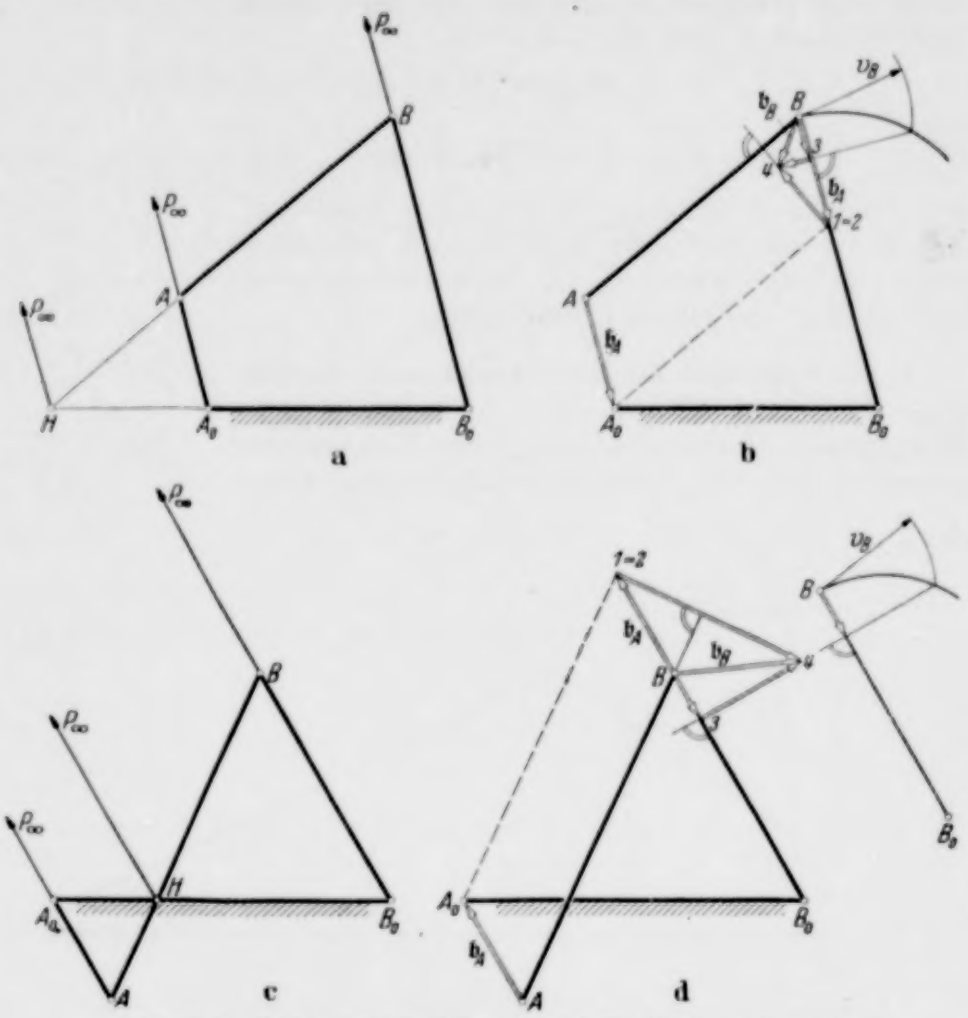


Abb. 17. Parallel-Lagen der Kurbelschwinge mit Beschleunigungskonstruktion.
a) Viereckslage und b) zugehörige Beschleunigungskonstruktion;
c) Überkreuzlage und d) zugehörige Beschleunigungskonstruktion.

Auf die Verzweigungslagen, die ja letzten Endes auch Steglagen sind, wird unten noch kurz eingegangen.

2. *Die Parallel-Lagen.* Da für $\alpha = 3\pi/2$ bei der Schubkurbel der Momentanpol ins Unendliche rückt, sind die ursprünglichen Voraussetzungen eigentlich nicht mehr erfüllt, und es bedarf daher einer besonderen Betrachtung: Bei der Kurbelschwinge liegt der Momentanpol im Unendlichen, wenn Kurbel und Schwinge parallel sind (Abb. 17a—d); dieser Fall kann also bei einer nicht durchschlagenden Doppelkurbel nicht auftreten. Ohne nun auf die Entartung der Ortskurven einzugehen, sei hier unmittelbar von der Beschleunigung ausgegangen: Da $v_B = v_A$ ist, wird $v_{BA} = 0$ und damit $\omega = \omega_{20} = 0$. Im Allgemeinen gilt für die Beschleunigung des Punktes B (Abb. 13 und 14) $\mathfrak{b}_B = \mathfrak{b}_A + \mathfrak{b}_{n\,BA} + \mathfrak{b}_{t\,BA}$, worin $b_{n\,BA} = v_{BA}^2/c = c\,\omega^2$ ist, die Richtung BA hat, und hier gleich Null wird, und worin $\mathfrak{b}_{t\,BA}$ senkrecht zu AB verläuft. Andererseits gilt $\mathfrak{b}_B = \mathfrak{b}_{n\,B} + \mathfrak{b}_{t\,B}$, worin $b_{n\,B} = v_B^2/b$, also hier gleich v_A^2/b ist, und die Tangential-

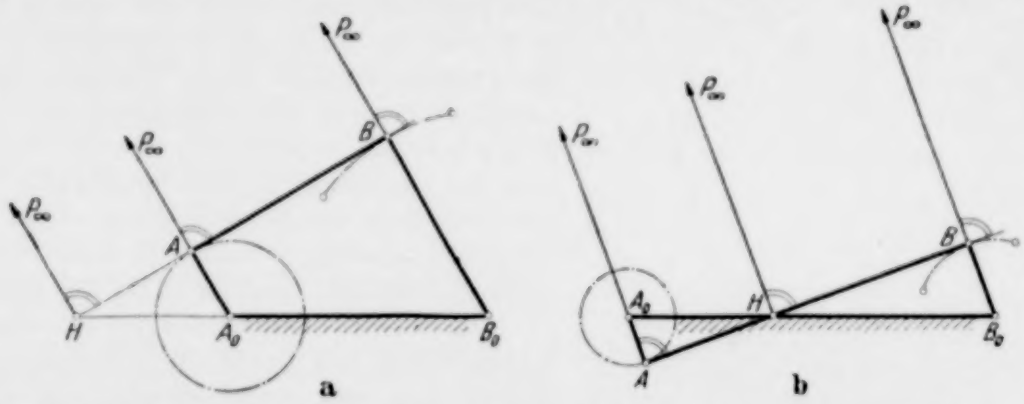


Abb. 18. Parallel-Lagen zweier Kurbelschwingen, wenn Koppel senkrecht Kurbel und damit v_B ein Extremum.

[1] Vgl. Fußnote 2 von S. 140.

komponente b_{tB}, oben kurz mit b_t bezeichnet, senkrecht zu B_0B verläuft, wobei aber b_{nB} parallel $b_{nA} = b_A$ ist. Nach Abb. 17b, d ist $34 = b_{tB}$, und diese Strecke wird gleich Null, wenn in der Parallel-Lage zudem noch die Koppel senkrecht zur Kurbel bzw. zur Schwinge steht (Abb. 18a, b). Das stimmt auch mit der früheren Bedingung „PH senkrecht Koppel" überein. Die Stellungen nach Abb. 18a, b sind aber nur bei bestimmten Maßbeziehungen möglich, d. h. wenn

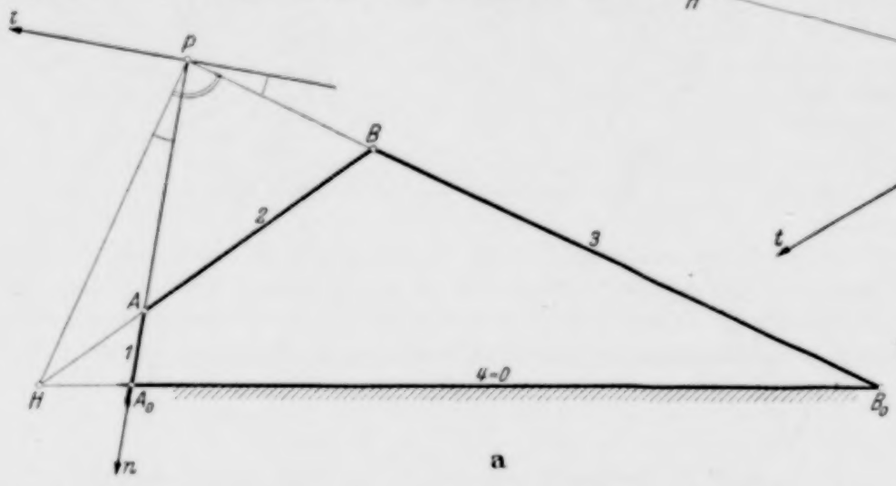
$$c^2 + (b - a)^2 - d^2 = 0 \quad \text{(Abb. 18a)} \qquad (7a)$$

oder

$$c^2 + (b + a)^2 - d^2 = 0 \quad \text{(Abb. 18b)} \qquad (7b)$$

ist. Setzt man beiläufig in die letzte Gleichung $d - b = e$ ein und läßt dann d nach unendlich gehen, so folgt wieder $a = e$ bei der Schubkurbel und die dort angegebene Kurbelstellung.

4. Das Extremum der Winkelgeschwindigkeit der Koppelebene. a) Allgemeine Bedingung. Die Winkelgeschwindigkeit $\omega[= \omega_{20}]$ der Koppelebene gegenüber dem Steg hat dann ein Extremum, wenn



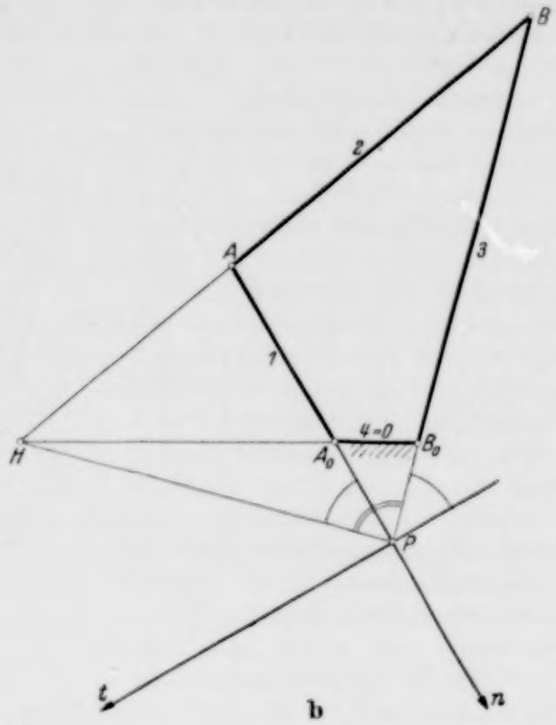


Abb. 19. Stellungen für extremale Winkelgeschwindigkeit ω_{20} der Koppelebene, PH senkrecht B_0P.
a) Kurbelschwinge,
b) Doppelkurbel.

ihre Ableitung, d. h. die Winkelbeschleunigung ε der Koppelebene durch Null geht. Da der Durchmesser des Gleichenkreises durch $g = D\,\omega^2/\varepsilon$ gegeben war, muß $g \to \infty$ gehen, d. h. der Gleichenkreis entartet in die Polbahnnormale n. Da nun aber die Punkte A und B der Koppelebene gleichzeitig auf der Kreisungspunktkurve k_u liegen müssen, A aber auf der Polbahnnormale als dem entarteten Gleichenkreis, muß auch die Kurve k_u entarten, und zwar in die Polbahnnormale n und in einen, die Polbahntangente t in P berührenden Kreis k^{**} vom Durchmesser $PL = l$, auf dem auch der Punkt B liegen muß. Es handelt sich also um den oben unter Abs. 2c) γ hervorgehobenen Sonderfall. Nun ist nach der *Bobillier*schen Konstruktion (Abb. 19, a, b) die Antriebskurbel A_0A dann auf der Polbahnnormale gelegen, wenn HP senkrecht zu PB steht:

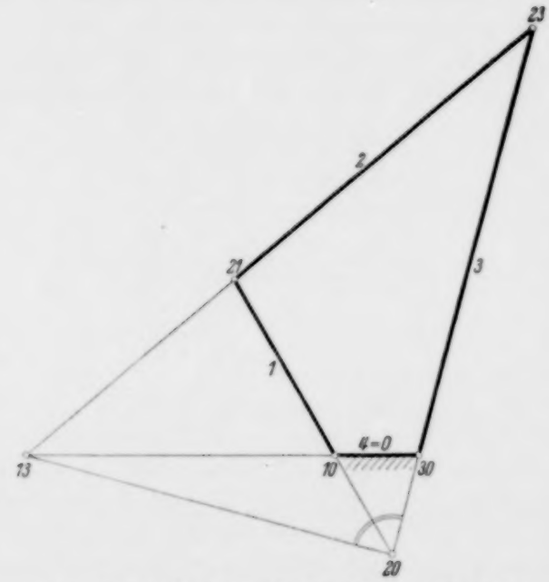


Abb. 20. Relativpole gemäß Abb. 19b (Doppelkurbel).

Ergebnis: Die Winkelgeschwindigkeit ω der Koppelebene hat dann ein Extremum, wenn die Kurbel bzw. die Antriebskurbel bei der Doppelkurbel auf der Polbahnnormale liegt, d. h. wenn die Verbindungsgerade zwischen Pol $P = 20$ und Relativpol $H = 31$ senkrecht zur Schwinge bzw. zur Abtriebskurbel 3 steht.

Denkt man sich einmal A_0A festgehalten und betrachtet die Bewegung des Gliedes AB gegenüber diesem, wobei das Glied B_0A_0 gleichförmig angetrieben sei (d und a bilden ja den Winkel α),

so ist B_0B die Koppel, und diese befindet sich in der oben erörterten umgekehrten Kardanlage, da die Verbindungsgerade vom Momentanpol 13 dieser Koppelebene und dem Hilfspol 20 senkrecht zur „Koppel" B_0B steht. Dies folgt aber auch aus den allgemeinen Sätzen über die Drehung von drei Ebenen gegeneinander: In Abb. 20 sind alle Relativpole eingetragen, und für die Winkelgeschwindigkeiten ω_{10}, ω_{20}, ω_{21} der drei Ebenen 1, 2, 0 gegeneinander um die Achsen (Pole) 10, 20, 21 gilt doch

$$\omega_{20} = \omega_{10} + \omega_{21} \quad \text{oder} \quad \omega_{21} = \omega_{20} - \omega_{10},$$

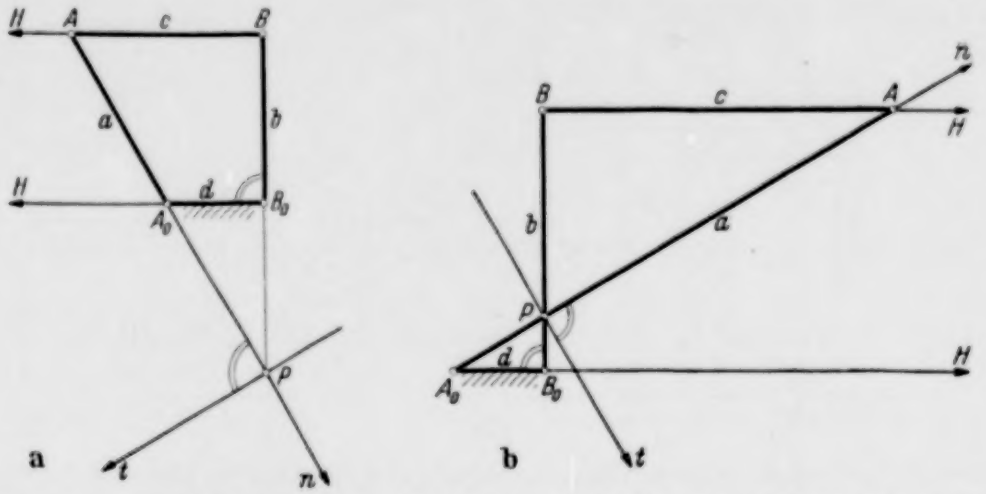


Abb. 21. Doppelkurbeln, wenn Koppel parallel Steg, aber PB_0 senkrecht PH, d. h. hier senkrecht zum Steg, ω_{20} = Extremum.

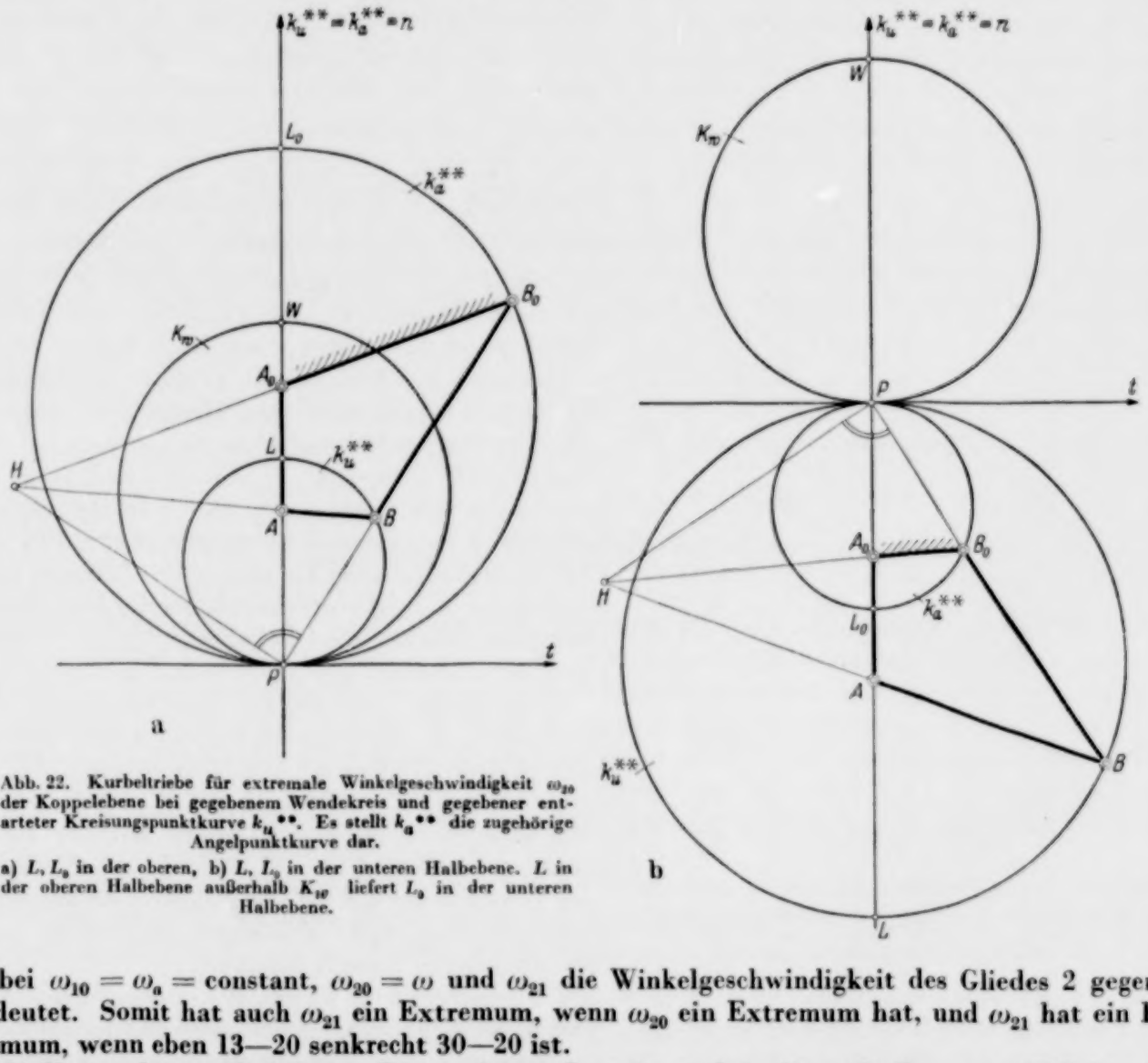


Abb. 22. Kurbeltriebe für extremale Winkelgeschwindigkeit ω_{20} der Koppelebene bei gegebenem Wendekreis und gegebener entarteter Kreisungspunktkurve k_u^{**}. Es stellt k_a^{**} die zugehörige Angelpunktkurve dar.

a) L, L_0 in der oberen, b) L, L_0 in der unteren Halbebene. L in der oberen Halbebene außerhalb K_w liefert L_0 in der unteren Halbebene.

wobei $\omega_{10} = \omega_a$ = constant, $\omega_{20} = \omega$ und ω_{21} die Winkelgeschwindigkeit des Gliedes 2 gegen 1 bedeutet. Somit hat auch ω_{21} ein Extremum, wenn ω_{20} ein Extremum hat, und ω_{21} hat ein Extremum, wenn eben 13—20 senkrecht 30—20 ist.

b) Koppel parallel Steg. Die stationäre Lage ist auch in dieser Stellung verwirklicht, aber sie liefert nur dann ein Extremum in ω, wenn gleichzeitig AA_0 Polbahnnormale ist und PH senk-

recht BB_0 steht, wobei H unendlich fern, also $PH \parallel AB$ und $\parallel A_0B_0$ ist (Abb. 21a, b). Eine solche Lage kann aber nie bei der Kurbelschwinge, wohl aber bei der Doppelkurbel auftreten. Denkt man sich wieder AA_0 festgehalten, so liegt die oben betrachtete Parallel-Lage vor [Abs. 3d) 2)]. Bei der

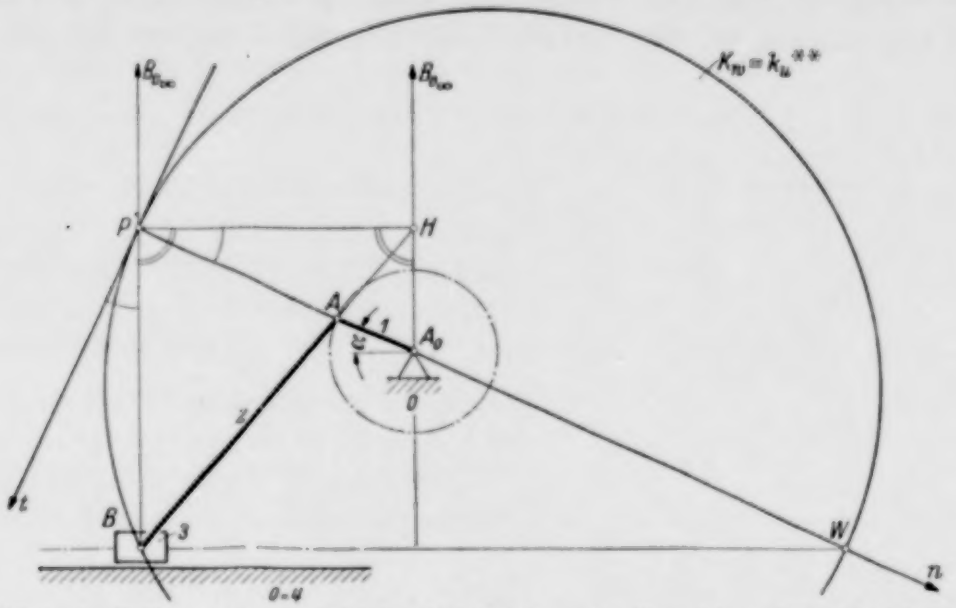


Abb. 23. Schubkurbeltrieb in der Stellung extremaler Winkelgeschwindigkeit ω_{30} der Koppelebene: Winkel $BPH = PHB_0 = PHA_0 = \pi/2$.

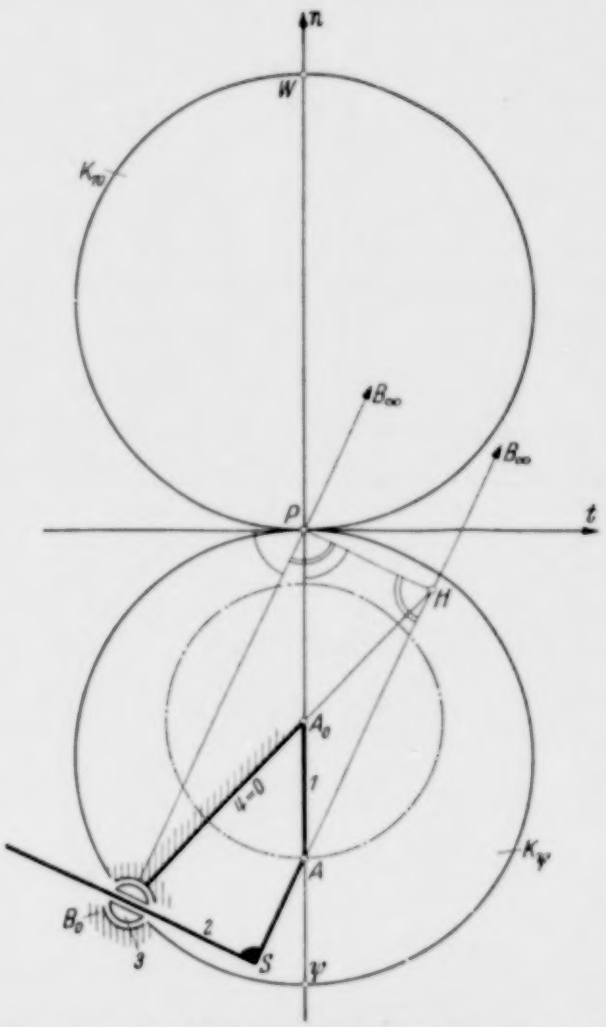


Abb. 24. Kurbelschleife ($B \to \infty$) in einer Stellung extremaler Winkelgeschwindigkeit ω_{20} der Koppel $= \omega_{30}$ des Abtriebsgliedes 3: $\sphericalangle B_0PH = AHP = \pi/2$.

Doppelkurbel ist die genannte Stellung nur bei bestimmten Maßbeziehungen erfüllt:

$$b^2 + (c-d)^2 - a^2 = 0\,, \quad \text{Abb. 21a,} \qquad (8a)$$

oder

$$b^2 + (c+d)^2 - a^2 - 0 \quad \text{Abb. 21b}\,. \qquad (8b)$$

c) Praktische Anwendung. Die Winkelgeschwindigkeit ω der Koppelebene kann zeichnerisch aus $v_A = \overline{PA}\,\omega$ oder $v_B = \overline{PB}\,\omega$ oder noch besser aus $v_{BA} = \overline{AB}\,\omega = c\,\omega$ (vgl. Abs. 3 b) leicht gewonnen werden: Trägt man v_{BA} über dem Kurbelwinkel α auf, so stellt die erhaltene Kurve bereits maßstäblich den Verlauf von ω dar. In der Nähe der Extrema fällt man nun ähnlich wie oben in Abs. 3 b) vom Relativpol $H = 13$ das Lot auf den Strahl B_0BP, Fußpunkt Y, Abb. 9a, und trägt die Strecke $PY = \eta$ über α auf. Der Schnittpunkt der Kurve $\eta(\alpha)$ mit der α-Achse bestimmt dann die gesuchten Stellungen der Extrema (Abb. 11b und 12b). Auch dieser Weg ist einfacher als der der Beschleunigungskonstruktion, bei welcher man $b_{tBA} = c\,\varepsilon$ über α auftragen müßte: $b_{tBA} = 0$ bedeutet $\varepsilon = 0$.[1]

d) Allgemeines Bild. Gibt man sich den Wendekreis K_w und den Kreis k_u^{**} (die entartete Kreisungspunktkurve k_u) vom Durchmesser $PL = l$ vor (Abb. 22a, b), so kann A auf n und B auf k_u^{**} gewählt werden. A_0 und B_0 folgen aus der *Euler-Savary*schen Formel, wobei B_0 auf dem Kreis k_a^{**} vom Durchmesser l_0 liegt [vgl. Gl. 5b]. In ähnlicher Weise wie oben ergibt sich dann wieder eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit.

e) Sonderfälle. α) *Schubkurbel.* Hier fällt der geradgeführte Punkt B auf den Wendekreis selbst, und da B gleichzeitig dem Kreis k_u^{**} angehört, sind Wendekreis und Kreisungspunktkurve k_u^{**} identisch: Alle Punkte des Wendekreises beschreiben Undulationspunkte! Da $l_0 \to \infty$ geht,

[1] Vgl. Abb. 13c und 14c.

ist auch hier $\tau' = \vartheta'$, d. h. $R_0 = D$ und $R = D/2$: Es liegt gleichzeitig die Kardanlage vor. Dies zeigt sich auch in Abb. 23, wonach nicht nur HP senkrecht PBB_0 ($B_0 \to \infty$) sondern auch PH senkrecht zum Steg A_0B_0 steht. Wie an anderer Stelle gezeigt wurde[1], ergibt sich für $\sin\alpha$ eine quadratische Gleichung und daraus eine einfache Bestimmungsgleichung für den Kurbelwinkel $\alpha = \alpha^{**}$. Dann liegt ein Extremum in ω für $\alpha = \alpha^{**}$ und für $\alpha = 180° - \alpha^{**}$ vor.

β) *Kurbelschleife.* Die Kurbelschleife wurde in Ziff. 3 noch nicht erwähnt, da $B \to \infty$ geht. Dann entartet der Kreis k_u^{**} in die unendlich ferne Gerade, und aus dem entsprechenden Teil der Angelpunktkurve k_u^{**} wird der Rückkehrkreis K_ψ vom Durchmesser $l_0 = (-)\,D$ (Abb. 24)[2]. Es

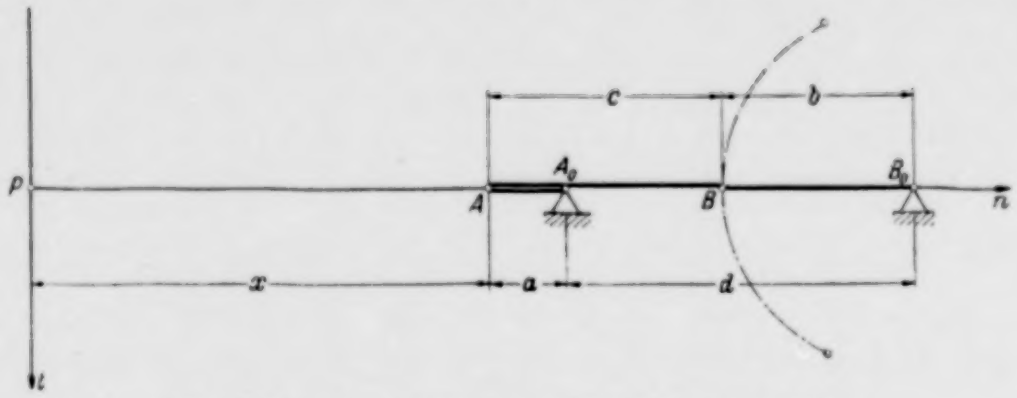


Abb. 25. Verzweigungslage eines durchschlagenden Getriebes, Maße.

kann also A_0 beliebig auf n gewählt werden und B_0 auf K_ψ; man erhält im allgemeinen Fall die geschränkte Kurbelschleife[3]: Die in A mit der Kurbel 1 gelenkig verbundene Koppelebene 2 gleitet durch die um B_0 drehbare entartete Schwinge 3. Die Winkelgeschwindigkeit ω_{20} ist immer gleich ω_{30}, und es steht hier sowohl HP senkrecht zu B_0PB wie auch PH senkrecht zur Koppel AB!

Wird der Punkt B_0 im Rückkehrpol Ψ selbst gewählt, so erhält man die zentrische Kurbelschleife mit $e = AS = 0$, und es bestätigt sich, daß das Abtriebsglied in der Steglage ein Maximum bzw. Minimum seiner Winkelgeschwindigkeit durchläuft.[4]

γ) *Totlage.* Auch die Totlage einer Kurbelschwinge gehört zu der hier betrachteten Stellung dann, wenn Schwinge und Kurbel dabei aufeinander senkrecht stehen: Die Schwinge liegt auf der Polbahntangente und die Kurbel einschließlich der Koppel, wie erörtert, auf der Polbahnnormale.

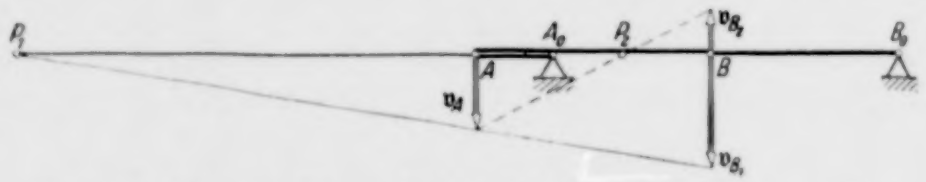


Abb. 26. Wie Abb. 25, aber Konstruktion der beiden Geschwindigkeiten v_{B_1} und v_{B_2} gemäß den beiden Momentanpolen P_1 und P_2 (vgl. Text).

5. Verzweigungslagen. Wenn die Punkte A, A_0 und B, B_0 eines Kurbeltriebes in einer Richtung und zwar auf der Polbahnnormale liegen, so ist die Bewegung des Getriebes nicht mehr eindeutig. Es kann das Getriebe durchschlagen, es kann aber auch die Geschwindigkeit um einen endlichen Wert springen. Diese Stellung gehört als Grenzfall in die Stellung der extremalen Abtriebsgeschwindigkeit wie auch der extremalen Koppelwinkelgeschwindigkeit — hat darüber hinaus aber keine praktische Bedeutung. Beim Schubkurbeltrieb[5] ist dieser Grenzfall durch $a + e = c$ oder $\lambda + \bar{\varepsilon} = 1$ gegeben [vgl. Abs. 3 d)], d. h. alle untersuchten Schubkurbeltriebe müssen die Bedingung $\lambda + \bar{\varepsilon} \leqq 1$ erfüllen, wobei $\lambda + \bar{\varepsilon} = 1$ die Grenzkurven liefert.

Es sei hier nur kurz erläutert, wie die Geschwindigkeiten in der Verzweigungslage ermittelt werden können (Abb. 25). Der Momentanpol der Koppelebene ist zunächst nicht eindeutig angebbar, er sei im Abstande x vom Kurbelpunkt A angenommen. Dann gilt nach der *Euler-Savary*schen

[1] Vgl. Fußnote 2 von S. 140.
[2] Beiläufig wird auch $R_0 = -D/2$ und $R = -D$: umgekehrte Kardanlage.
[3] Über eine praktische Anwendung vgl. *W. Meyer zur Capellen*, Werkstatt und Betrieb 89 (1956) S. 67.
[4] Vgl. *W. Meyer zur Capellen*, Werkstatt und Betrieb 89 (1956) S. 581.
[5] Vgl. Fußnote 2 von S. 140.

Formel (2)

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+a} = \frac{1}{x+c} - \frac{1}{x+c+b} = \frac{1}{D} \tag{9}$$

oder geordnet

$$x^2 (a-b) + 2\,a\,c\,x + a\,c\,(c+b) = 0 \tag{10}$$

mit den Lösungen

$$x_1 = \frac{a\,c}{b-a}(\delta+1)\,, \qquad x_2 = -\frac{a\,c}{b-a}(\delta-1)\,, \qquad \delta = \sqrt{\frac{b\,d}{a\,c}}\,, \tag{11}$$

wobei hier $a + b = c + d$.

Es gibt also zwei Momentanpole[1] und damit zwei Abtriebsgeschwindigkeiten, wie in Abb. 26 angegeben, und auch zwei Wendekreise. Es ist nicht die Absicht hier im Einzelnen auf die verschiedenen möglichen Fälle einzugehen, zu denen auch der Antiparallelkurbeltrieb oder das *Gallowaygetriebe* gehören, sondern es sollte nur kurz auf den Grenzfall hingewiesen werden.

Beim Schubkurbeltrieb[2] ergeben sich mit $b \to \infty$ und $d \to \infty$ die einfachen Werte $x_1 = \sqrt{a\,c}$ und $x_2 = -\sqrt{a\,c}$.[3]

(Eingegangen am 13. Juli 1956)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *W. Meyer zur Capellen*, Aachen, Ronheiderweg 46

[1] Die beiden Pole sind die Doppelpunkte der durch die Paare A, B_0, B, A_0 bestimmten Involution. Vgl. *R. Müller* (Fußnote 1 von S. 141).

[2] Vgl. Fußnote 2 von S. 140.

[3] Während der Korrekturen wurde mir die Arbeit von F. *Freudenstein* „On the Maximum and Minimum Velocities and the Accelerations in Four-Link Mechanisms" Trans. of ASME (1956) S. 779/787 -ASME Paper 55-SA-20 bekannt, in welcher auf anderem Wege die gleichen Bedingungen wie in Abs. 3a über das Extremum der Abtriebsgeschwindigkeit gefunden wurden.

Die selbsttätige Regelung. Theoretische Grundlagen mit praktischen Beispielen. Von Professor Dr.-Ing. **A. Leonhard,** Stuttgart. Zweite neubearbeitete Auflage. Mit 319 Abbildungen. XII, 376 Seiten Gr.-8°. 1957. Ganzleinen DM 39,—

Die Regelungstechnik hat als verhältnismäßig junges Teilgebiet der Technik in den letzten Jahren einen ungeheuren Aufschwung erlebt. An dieser Aufwärtsentwicklung sind Techniker, Naturwissenschaftler und Mathematiker aller zivilisierten Länder beteiligt. In das nunmehr in 2. Auflage vorliegende Werk sind neben den bereits als klassisch anzusehenden Methoden möglichst weitgehend auch die in der Zwischenzeit international erarbeiteten neuesten Verfahren für die Behandlung von Regelproblemen eingearbeitet worden.

Seit Erscheinen des Buches „Die selbsttätige Regelung in der Elektrotechnik" im Jahre 1940 im gleichen Verlag und vom gleichen Verfasser, das als eines der ersten auch neuere Verfahren der Regelungstechnik behandelt hat und als Vorläufer des jetzigen Werkes anzusehen ist, sind zwar zahlreiche zusammenfassende Werke in verschiedenen Sprachen über das Gebiet der Regelung entstanden, trotzdem wird das vorliegende Werk dank seiner Eigenart, theoretische Methoden immer nur im Zusammenhang mit durchgerechneten Beispielen zu behandeln, seinen Platz in der Regler-Literatur behaupten.

Auch in der 2. Auflage, bei der die Benennungen und Begriffe weitgehend dem inzwischen erschienenen Normblatt angeglichen sind, werden zunächst in einem ersten Abschnitt die Grundlagen der Regelungstechnik und anschließend die Einzelglieder des Regelkreises, also im wesentlichen Regler und Regelstrecke, behandelt. Ein zweiter Abschnitt beschäftigt sich mit den verschiedenen rechnerischen und graphischen Methoden zur Ermittlung des Regelvorganges, ein dritter mit dem Stabilitätsproblem. Schließlich wird im vierten Teil ausführlich auf die Synthese des Regelkreises, also vor allem auf die zweckmäßige Bestimmung frei wählbarer Reglerkonstanten eingegangen.

Inhaltsübersicht: **Grundlagen:** Allgemeines über Regelung. — Verhalten von Meßwerken bzw. Reglern ohne Hilfsenergie. — **Verhalten von Einzelgliedern (Regelgliedern) des Regelkreises.** — Versuchstechnische Feststellung des Verhaltens von Einzelgliedern des Regelkreises. — **Ermittlung des Regelvorganges:** Klassische Verfahren zur Ermittlung des Regelvorganges mit Hilfe der Differentialgleichung. — Die Ermittlung des Regelvorganges mit Hilfe der Laplace-Transformation. — Ermittlung der charakteristischen Gleichung des Regelvorganges mit Hilfe des Frequenzganges. — Ermittlung des Regelvorganges mit Hilfe des Frequenzganges. — Ermittlung des Regelvorganges bei nichtlinearen Regelgliedern. — **Die Stabilität der Regelung:** Stabilitätsuntersuchungen. — Verbesserung der Stabilität. — **Festlegung frei wählbarer Regelkonstanten.** — Verschiedene Methoden für die zweckmäßige Wahl der Regelkonstanten. — Kurvenblätter für die zweckmäßige Bestimmung frei wählbarer Regelkonstanten. — **Anhang:** Die Lösung von Gleichungen höheren Grades mit konjugiert komplexen Wurzeln. — Literaturverzeichnis. — Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Elektrische Messung mechanischer Größen.

Von Dr.-Ing. **Paul M. Pflier**, Nürnberg. Vierte neubearbeitete Auflage. Mit 349 Abbildungen. VIII, 276 Seiten Gr.-8°. 1956. Ganzleinen DM 33,—

Inhaltsübersicht: **A. Grundlagen der elektrischen Messung.** I. Vorzüge elektrischer Meßverfahren. II. Die Eigenschaften der elektrischen Meßgeräte. Allgemeines. Grundbegriffe der Meßtechnik. VDE-Vorschriften. Symbole und Schaltzeichen. Meßfehler. Empfindlichkeit. Spannungseinfluß. Spannungskonstanthalter. Spannungsunabhängige Meßgeräte. Frequenzeinfluß. Temperatureinfluß. Schwingungseigenschaften des beweglichen Organs. Fernübertragung. III. Meßwerke und Meßverfahren zum Durchführen von Rechenoperationen. Addition und Subtraktion mit dem Drehspulmeßwerk. Multiplikation mit dem elektrodynamischen Meßwerk. Multiplikation mit dem Halleffekt. Division mit dem Kreuzspulinstrument. IV. Elektrische Abbildung mathematischer Beziehungen. Addition zweier Größen. Subtraktionsschaltungen. Addition und Subtraktion von Wechselspannungen und Strömen. Divisionsschaltungen. Multiplikationsschaltungen. Differentiation. Integration. Brückenschaltungen. — **B. Die Möglichkeiten, mechanische Größen elektrisch zu messen.** I. Energieumformer. Allgemeines. Induktionsprinzip. Piezoelektrizität. Strömungselektrizität. Thermoelektrische Umformer. Lichtelektrische Umformer. Induktive Umformer. II. Physikalische Zusammenhänge zwischen nichtelektrischen und elektrischen Größen. Allgemeines. Beeinflussung des Widerstandes eines Leiters. Steuerung der Kapazität eines Kondensators. Mechanische Steuerung der Induktivität einer Spule. Zeit und Elektrizitätsmenge. Elastische Beanspruchung und Eigenfrequenz. III. Wellenausbreitung und Bestrahlung. Allgemeines. Radioaktive und Röntgenstrahler. Strahlungsmeßgeräte. Ultraschall-Bestrahlung. Lichtdurchstrahlung (Photoelastisches Verfahren. IV. Mechanische Steuerung eines elektrischen Kreises. Allgemeines. Kontinuierlich arbeitende Verfahren. Impulsverfahren. — **C. Meßverfahren.** I. Längenmessung. Stellungsanzeige und Wegmessung. Elektrische Mikrometer. Dickenmessung. II. Kraftmessung. Dehnungsmessung. Kraftmeßdosen. Elektrische Waagen. Bandzugmesser. Schnittkraftmesser. Gasdruckmesser. Drehmomentmesser. III. Geschwindigkeitsmessung. Drehzahlmesser. Drehzahldifferenz- und Schlupfmessung. Messung von Fahrzeuggeschwindigkeiten. Strömungsmesser. IV. Messung von Beschleunigung, Schwingungen, Erschütterungen. Allgemeines. Drehbeschleunigungsmesser. Beschleunigungsmesser. V. Zeitmessung. Langzeitmesser. Zeitschreiber. Elektronische Zeitmesser. Zeitwaagen. — **Literaturverzeichnis.** — **Namenverzeichnis.** — **Sachverzeichnis.**

Die mechanischen Größen an Ort und Stelle mit mechanischen oder optischen Mitteln zu messen ist auch heute noch in vielen Fällen üblich und ausreichend. Überall aber, wo die Meßstelle schlecht zugänglich ist, zwischen Meßstelle und Ableseort größere Entfernungen liegen, mehrere Größen zueinander in Beziehung gebracht werden sollen oder wo die Meßgröße irgendwelche Vorgänge steuern soll, haben sich die elektrischen Meßverfahren als zweckmäßig erwiesen und in ständig wachsendem Umfang eingeschaltet.

Die 4. Auflage dieses allgemein anerkannten Buches behält im wesentlichen die frühere Einteilung bei, versucht jedoch Grundsätzliches vom Speziellen schärfer zu trennen und die Systematik zu verbessern; sie befaßt sich auch in stärkerem Maße mit den neuerdings in den Vordergrund gerückten Meßverfahren.

Das Buch behandelt zunächst die Eigenschaften der elektrischen Meßgeräte und die Vorzüge der elektrischen Messung, anschließend werden die Möglichkeiten der mechanisch-elektrischen Umwandlung und die Beziehungen zwischen mechanischen und elektrischen Größen gezeigt, im letzten Abschnitt werden die zweckmäßigen Meßverfahren für die einzelnen mechanischen Größen besprochen.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Springer-Verlag · Berlin / Göttingen / Heidelberg. Printed in Germany. V/12/6 0,8 K.B./Z. 040.